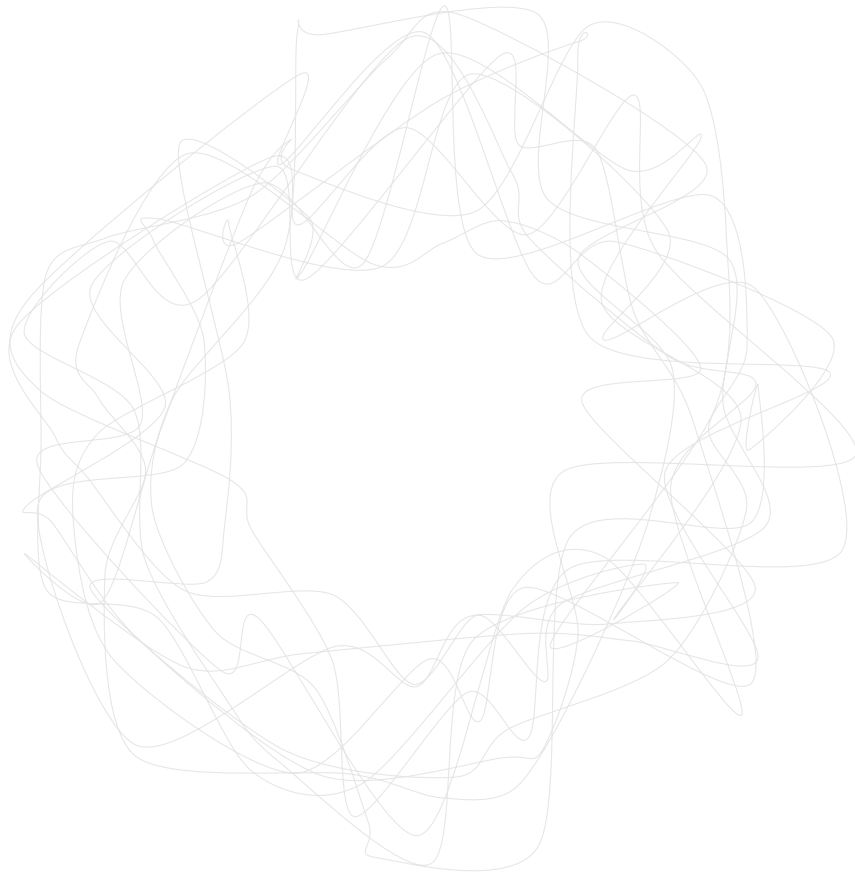


Quantumstructuur

voor vwo (met opgaven)

Philip Habing



COLOFON

Versie 4.4; 11 november 2019

gezet in L^AT_EX,

Tekst, afbeeldingen en vormgeving:

Philip Habing, Leiden

contact: philiphabing *apestaartje* gmail.com

De (html)-links in deze introductie werken in een digitale pdf-lezer.



Attribution-NonCommercial 4.0 International

INHOUD

voorwoord	v
1 inleiding	1
2 klassieke mechanica	3
3 trillingen en golven	9
4 wiskunde	15
5 quantummechanica	27
6 twee toestanden	43
7 quantumcomputer	49
A solvay 1927	55
B antwoorden	57
literatuur	73
alfabetische index	75

VOORWOORD

Waarom zou je een zo mooi onderwerp als quantummechanica niet al op jonge leeftijd leren? Laat je niet afschrikken door verhalen dat het moeilijk, vaag en onbegrepen is of dat zelfs vooraanstaande natuurkundigen zeggen: ‘Ik snap het ook niet’. Quantum is modern, uiterst fascinerend, vormt de basis van alle natuurkunde, is enorm de moeite waard, anders dan je gewend bent en voor het grootste deel heel logisch, precies en duidelijk (zie paragraaf 5.3).

Deze introductie neemt aan dat je op school al hebt geleerd over: (a) vectoren en de ketting-regel, en (b) over golven bijvoorbeeld $c = f\lambda$ en $E = hf$. Maar als dat niet het geval is, helpt je leraar, google of een boek uit een volgend leerjaar waarschijnlijk ook.

Zoals de titel al aangeeft, dit schrijven is een kort-door-de-bocht introductie op quantum die volgens mij aansluit op wat je op school leert. De nadruk ligt op de *structuur van de quantummechanica* omdat ik van mening ben dat je met de wiskunde in 5-vwo en een portie goede wil, die structuur kunt begrijpen. Het is fascinerend om te zien dat slechts een vier (of vijf) quantumregels een zo rijk vakgebied vormen.

QUANTUMSTRUCTUUR VOOR vwo heb ik voor het eerst gegeven op het Corderius College Amersfoort in 2016 aan vwo-leerlingen die deel uitmaakten van een zogeheten excellente groep. Met wisselend succes overigens omdat de cursus vrijblijvend was en dat sommige van deze slimme leerlingen, met alle begrip, liever excellent wilden worden in bijvoorbeeld moleculaire biologie, getaltheorie of python-programmeren. Maar af en toe riep een zestienjarige met grote ogen ‘what the fuck!’ als het lukte om een toestandsevolutie uit te voeren. En dat was voor mij meer dan genoeg reden om dit materiaal te maken.

Deze introductie is een direct gevolg van een inspirerende en leerzame college-serie van Karel-Jan Schoutens, Jasper van Wezel en Marcel Vonk met daarna veel inspiratie van Carla van Boxtel en Peter Uylings (allen UvA). Vooral bij het hoofdstuk over de quantumregels heb ik veel gebruik gemaakt van materiaal uit Bowman 2008 en Van Wezel 2013. Het was Henk Buisman <http://www.quantumrules.nl/> die mij steun en vertrouwen gaf om dit werk niet te laten verstoffen op mijn harde schijf.

Philip Habing, Leiden 2019.

1 INLEIDING

– Quantum mechanics is not a theory, but rather a framework within which we believe any correct theory must fit.

Murray Gell-Mann, 1969.

Quantummechanica is een natuurkundige theorie die uitkomsten voorspelt van experimenten die plaatsvinden op een atomaire schaal, zeg vanaf 10^{-6} m. Het verschil tussen de quantum natuurkunde, ontwikkeld in de periode van 1900 tot 1924, en de klassieke natuurkunde, de natuurkunde van voor 1900, zit in het doen van experimenten. In de klassieke natuurkunde kun je een meting: (a) in principe oneindig subtiel uitvoeren (de meting heeft geen invloed op het systeem), en (b) heel precies voorspellen.

Metten aan een quantumstelsel is anders op beide vlakken. Een meting aan een quantum stelsel – hoe subtiel ook – houdt onherroepelijk in dat je het stelsel *verstoort*. Met andere woorden dat je dus niet weet hoe het stelsel eruit zag voor dat je er aan meette. Daarnaast kun je (meestal) alleen maar statistisch voorspellen welke uitkomst bij de volgende meting tevoorschijn komt. Je weet dan alle mogelijke uitkomsten wel, maar *welke* uitkomst je zo direct gaat aflezen op je instrument, daarover kun je alleen maar een kans geven.

De quantummechanica wordt vaak gezien als ingewikkeld. Dat komt onder andere omdat de theorie verschijnselen in zich heeft die je niet dagelijks tegenkomt en die je ook niet gewend bent in de natuurkunde zoals je die tot nu leerde op school. Zo zit kans ingebakken in de quantum-theorie en bovendien is de theorie erg wiskundig.

En uiteraard speelt ook een rol dat natuurkundigen het niet bepaald met elkaar eens zijn hoe je de theorie moet uitleggen, of wat de betekenis ervan is, of de theorie wel af en niet een soort ‘tijdelijke theorie’ is die in de toekomst wordt vervangen door een betere en veel meer van dat soort discussies.

Nog iets over quantum als *framework* of als fundament. Als je een relatieboom maakt van de onderwerpen die de natuurkunde bestudeert, dan staat de quantummechanica min of meer onderaan. Dat wil zeggen dat alle andere onderwerpen van de natuurkunde uiteindelijk hun oorsprong vinden in quantum. (En de soliditeit van dat fundament mag je aangeven met een significantie van twaalf cijfers).

DEZE INTRODUCTIE gaat vooral over de regels van de quantum-

Wheeler en Tegmark
2001

Dat is onder andere de
[fijnstructuurconstante](#)
 $\alpha^{-1} =$
137.035999139(31).

mechanica, de zogenoemde ‘formalistische’ benadering: Hoe kun je rekenen met de theorie (volgens mij kun je daarna pas gaan praten of de theorie wel het laatste woord is enzovoort.)

Om over quantumtheorie te praten, is het handig om sommige begrippen van klassieke natuurkunde eerst helder te definiëren, daarom zijn de eerste twee hoofdstukken over klassieke mechanica en over trillingen en golven. Quantummechanica is een erg wiskundige theorie, hoofdstuk vier helpt je met die wiskunde. Hoofdstuk vijf start met een overzicht van het domein *F1 Quantumwereld* uit de syllabus natuurkunde-vwo en dan volgt de kern van dit diktaat: De regels van de quantummechanica. De regels kun je begrijpelijk toepassen op systemen met twee quantum-toestanden, daarover gaat hoofdstuk zes. Tot slot, als een soort kers op de taart, legt hoofdstuk zeven uit over de quantumcomputer.

Op 3e8.nl geef ik uitleg
over onder andere
domein F1.

2 KLASSIEKE MECHANICA

2.1 IMPULS

De natuurkunde die je op school leert, gaat over de plaats en de beweging van puntvormige voorwerpen en over de invloed van die voorwerpen op elkaar. Deze natuurkunde tot zeg de vijfde klas noem je de klassieke natuurkunde: historisch gezien is dat in grote lijnen de mechanische natuurkunde van Newton en de elektrische- en magnetische veldtheorie van Maxwell.

Om de plaats en de beweging van een puntvoorwerp goed te beschrijven, heb je maar twee grootheden nodig: plaats x en tijd t , en daarbij hoe de plaats verandert met de tijd. Omdat de massa m van een puntmassa (meestal) niet verandert, kan het handig zijn om massa en snelheid samen te voegen tot een nieuw begrip impuls p :

$$p = mv. \quad (2.1)$$

Deeltjes fysici koppelen graag impuls en kinetische energie:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.2)$$

HANDIGE APPS

Walter-Fendt.de: [Botsingen \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Collision lab \(java-app\)](#).

2.2 TOESTAND

Om een natuurkundige situatie te bespreken, praat je over de toestand van een systeem. Een toestand is een set van variabelen die een systeem beschrijft *zonder iets te zeggen over het verleden of over de toekomst van dat systeem*. De toestand kun je zien als een soort momentopname of een foto van de set variabelen.

Hoewel je in de vierde klas leert over een (x,t) -, (v,t) - en (a,t) -diagram voor puntvoorwerpen, gebruiken natuurkundigen graag een diagram waarin ze alle mogelijke toestanden van een systeem kunnen aangeven. Zo'n toestandruimte kan verschillende dimensies en afmetingen hebben. Soms is één getal of één begrip genoeg, soms is het toestanddiagram een twee- of meer-dimensionaal assenstelsel.

Een puntvoorwerp bevat alle massa of lading of magnetisme geconcentreerd in één punt met een afmeting van nul.

In de modelomgeving van Coach7 is de toestand de waarde van de grootheden op een bepaald tijdstip.

En een toestand is dan een vector in het toestanddiagram.

EEN EENVOUDIG voorbeeld is de toestand van een munt. De toestanden zijn kop of munt en het toestanddiagram bestaat uit maar twee punten.

EEN COMPUTER-BIT (afgekort als een cbit) kan in de toestand 0 of 1 zijn. De toestanddiagram van één cbit bestaat uit twee punten, maar heb je n cbits dan heb je 2^n punten.

[wiki: phase space.](#)

DE TOESTAND van een puntmassa beschrijven fysici met de grootheden x en p en het toestanddiagram is een (x,p) -diagram, ook wel faseruimte genoemd. Iedere mogelijke toestand die de puntmassa kan aannemen, kun je weergeven met een punt in die faseruimte.

Benson 2008, p. 99

TOT SLOT een dwarsfluit. Als je de laagste toon blaast op een dwarsfluit (C4: $f = 262$ Hz) ontstaat er een staande golf in de buis van de dwarsfluit. De laagste toon (de grootste golflengte) mag je beschouwen als de grondtoestand van de fluit. Alle mogelijke boventonen van een dwarsfluit zijn een veelvoud van deze grondfrequentie, en de boventonen vormen zo een telbare maar oneindige rij die steeds met eenzelfde stapgrootte toeneemt (262 Hz):

grondtoon (grondtoestand) $f = 262$ Hz;

eerste boventoon ('1ste boventoestand') $f = 524$ Hz;

tweede boventoon ('2de ...' $f = 786$ Hz;

enzovoort.

HANDIGE APPS

Phet.colorado.edu: [Normal Modes: \(flash-app\).](#)

Phet.colorado.edu: [States of matter \(java-app\).](#)

Walter-Fendt.de: [Staande golf longitudinaal \(html5\).](#)

2.3 EVOLUTIE

Meestal wil je meer van een puntmassa weten dan één (x,p) -toestand op één tijdstip in de faseruimte; meestal wil je beschrijven hoe een puntmassa van een begintoestand in de tijd gaat naar een volgende toestand. Een natuurkundige evolutiewet beschrijft hoe dat gaat. Een evolutiewet vertelt je hoe je een toestand 'update' in de tijd: Welke berekening je moet uitvoeren om te komen van de oude toestand op t naar de nieuwe toestand op $t + dt$. In een modelleromgeving van

bijvoorbeeld Coach doe je dikwijls dit soort berekeningen:

Cma Coach

$$\begin{aligned}F_w &= 0,5 * k * v^2 \\F_z &= m * g \\F_{res} &= -F_z + F_w \\a &= F_{res}/m \\v &= v + a * dt \\h &= h + v * dt.\end{aligned}$$

Hier zijn meerdere update-regels (alleen de regel van F_z niet); de laatste twee regels geven de update (evolutie) van de snelheid en de plaats. Updaten of tijdevolutie houdt dus in:

$$\text{toestand}_t \xrightarrow{\text{updaten}} \text{toestand}_{t+dt}. \quad (2.3)$$

EVOLUTIEWETTEN KOM je in alle gebieden van de natuurkunde tegen. Voor de klassieke natuurkunde geldt de regel dat een evolutiewet deterministisch moet zijn in de tijd. Daarmee bedoel je dat iedere toestand in de faseruimte slechts afkomstig is van één toestand uit het verleden en evolueert naar slechts één toestand in de toekomst. Die eis staat verwoord in het begrip reversibel. Reversibel wil zeggen dat je heen-en-weer tussen de toestanden kunt:

$$\text{toestand}_t \leftrightarrow \text{toestand}_{t+dt}. \quad (2.4)$$

De klassieke natuurkunde stelt dus de eis dat een evolutiewet reversibel moet zijn in de tijd.

HANDIGE APPS

Dynamisch modelleren = evolueren in de tijd met; wat je heel goed met computers kunt doen. Op school gebruik je een vereenvoudigde modelleertaal die je onder andere kunt gebruiken via de webapp van collega Tom Kooij: [modelleertaal](#) en die taal ben je al tegengekomen in *coach7*.

Gratis online grafische rekenmachine: [Desmos.com](#).

2.4 OPGAVEN KLASSIEKE MECHANICA

1. Impuls

Download het PHET collision lab en laat twee dezelfde massa's, zonder wrijving, volledig elastisch botsen.

- Bereken voor en na de botsing de totale hoeveelheid impuls.
- Laat de massa's een tijdje over de tafel botsen. Wat kun je zeggen

over de verandering van de impuls in de tijd, met andere woorden over dp/dt ?

2. Telbare toestandruimte

- a) Beschrijf de toestandruimte van een munt die je gooit.
- b) Idem voor een dobbelsteen.
- c) Teken de toestandruimte van een dwarsfluit
- d) Idem voor computer met 256 klassieke cbits.

3. Faseruimte

Teken faseruimte (x,p) voor een puntmassa die:

- a) Stil staat.
- b) Een eenparig rechtlijnige beweging uitvoert.
- c) Valt.

4. Gassen; (pV)-diagram

De toestand van een gas kun je weergeven in een (p,V) -toestand-diagram. (Horizontaal V , verticaal: p .)

- a) Teken een (pV) -diagram en geef de assen aan.
- b) Teken een willekeurige toestand van een gas dat in evenwicht is met omgeving. (Toestand T_1)

Nu ga je het gas – bij constante temperatuur – samenpersen.

- c) Geef aan wat er gebeurt in het (pV) -diagram, en teken het eindpunt (T_2)

- d) Vanuit T_2 ga je – bij vast volume – opwarmen. Teken T_3

- e) Van T_3 laat je vrij uitzetten (onder gelijkblijvende druk). Teken T_4 .

- f) Tot slot koel je – bij vast volume – weer af tot de oorspronkelijk temperatuur. Teken het laatste punt.

5. Update-regel

Het symbool van verschil is $\Delta = \dots_2 - \dots_1$.

Gebruik dit symbool om van de vergelijking $a = \Delta v / \Delta t$ de een-na-laatste update-regel van het Coach-model.

6. Coach7 Evolutie

Maak in Coach 7 een model van een vrije val. Plot de beweging in de faseruimte.

Kun je het model ook achteruit laten werken? Wat moet je dan veranderen?

7. Evolutie faseruimte

Beschouw de faseruimte van de klassieke mechanica.

- a) Hoe luidt de evolutie-wet van een eenparige rechtlijnige beweging?
- b) Hoe luidt de evolutiewet bij een vrije val?
- c) Leg uit waarom Newtons wet $F = ma$ een evolutiewet is.

8. Twee toestand systeem

Een evolutiewet voor een munt bestaat uit twee regels:

i $M \rightarrow K$, en

ii $K \rightarrow M$.

- a) Leg uit of dit een klassieke evolutiewet is.

b) Geef een voorbeeld van een niet deterministisch verloop van toestanden.

9. Zes toestanden systeem

a) Beschrijf de toestand-ruimte van een dobbelsteen.

Een evolutiewet van een dobbelsteen zou kunnen zijn: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$.

b) Leg uit of dit – klassiek gezien – een acceptabele evolutiewet kan zijn.

c) Leg uit dat de evolutiewet: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ enzovoort klassiek niet mogelijk is.

Voor een bewerkte dobbelsteen is een evolutiewet gedefinieerd als: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ enz.

d) Er is hier sprake van een behoudswet; welke 'eigenschap/grootheid' wordt behouden?

e) Kun je nog meer behoudscycli (met behouden grootheid) bedenken?

3 TRILLINGEN EN GOLVEN

3.1 HARMONISCHE OSCILLATOR

De harmonische oscillator (massa-veer-systeem genoemd) keert vaak terug in de quantummechanica. Daarover heb je onder andere geleerd:

$$E = \frac{1}{2}Cx^2 \quad \text{en} \quad dV/dx = -F = Cx. \quad (3.1)$$

Als je een harmonische oscillator een zetje geeft, gaat deze trillen met een exact bepaalde eigenfrequentie. De eigenfrequentie die hoort bij deze toestand kun je uitrekenen met:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (3.2)$$

HANDIGE APPS

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Classical oscillator a track \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Atomic interactions \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Resonance \(flash\)](#).

Phet.colorado.edu: [Skate park \(html5\)](#).

3.2 GOLF

Een golf is een trilling die zich voorplant waarbij – voor een bepaald medium – je op school aanneemt dat het product van frequentie en golflengte (met de eenheid m/s) constant is:

$$f\lambda = c. \quad (3.3)$$

Dat is vaak niet het geval: $dn/d\lambda < 0$.

3.3 EIGENTOESTAND

Als je een golf opsluit in een beperkte ruimte, blijken bij heel verschillende frequenties staande golven te ontstaan. In een dwarsfluit krijg je staande golven als er een precies aantal halve golflengtes in de buis passen:

$$L = n \times \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad f_n = n \times \frac{v_g}{2L}; \quad \text{met } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

waarbij L de lengte van de buis, λ de golflengte; f_n de eigenfrequentie en v_g de snelheid van het geluid. Je kunt dus (n) eigenfrequenties maken

met een dwarsfluit. De laagste frequentie noem je de grondtoon en een hogere frequentie noem je een boventoon. Bij een dwarsfluit is de grondtoon C4 ongeveer $f_1 = 262$ Hz; de eerste boventoon is dan $f_2 = 524$ Hz. Zolang je de lengte van de buis niet verandert, kun je een eigenfrequentie beschouwen als een toestand van de fluit. Met andere woorden: Je kunt de eigenfrequentie ook als een eigen-toestand beschouwen.

IN DE ontwikkeling van de quantummechanica, keek de Engelsman Paul Dirac in 1939 opnieuw naar het idee van toestanden. Hij introduceerde voor een toestand een apart symbool: de ket. Een ket is eigenlijk twee haken met een plek ertussen om een aanduiding of naam te noteren:

$$|\dots\rangle. \quad (3.5)$$

Het getal/woord/symbool tussen de ket-haken is alleen maar een etiket. Dat etiket heeft geen enkele betekenis, het is slechts een aanduiding bedoeld om onderscheid te maken tussen de toestanden. Voorbeelden van kets zijn:

$$|0\rangle; |\text{links}\rangle; |\text{jan}\rangle; |\uparrow\rangle.$$

Voor een fluit kun je de eigentoestanden noteren als:

$$|GT\rangle; |BT1\rangle; |BT2\rangle; |BT3\rangle; |BT4\rangle,$$

of wat je ook mag weergeven als:

$$|1\rangle; |2\rangle; |3\rangle; |4\rangle; |5\rangle.$$

HANDIGE APPS

Walter-Fendt.de: [Staande golf uitgelegd \(html5\)](#).

Walter-Fendt.de: [Staande golf longitudinaal \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Eigenstates \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Normal Modes: \(flash-app\)](#).

3.4 SUPERPOSITIE

In 1820 liet de Fransman Joseph Fourier zien dat als je sinusvormige golven met verschillende frequenties (golflengtes) lineair bij elkaar optelt, de som altijd een periodieke functie oplevert:

$$\sum a_n \sin(nx) = \text{periodieke functie}, \quad (3.6)$$

waarbij het getal a_n aangeeft hoe sterk een bepaalde sinus in de functie aanwezig is.

Lineair optellen noem je superpositie. Onder andere superpositie maakt dat je instrumenten van elkaar kunt onderscheiden: Als je een

Niet lineair optellen is
bijvoorbeeld:
 $f = a_1 f_1^2 + a_2 \sqrt{f_2}.$

C4-noot blaast op een dwarsfluit dan hoor je naast de grondtoon ook een combinatie van grond- en boventonen die anders zijn dan als je een C4-noot blaast op een klarinet. Dat kan bij een dwarsfluit bijvoorbeeld met de eigentoestanden:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_n f_n \dots \quad (3.7)$$

of als je Dirac wilt volgen:

$$|f\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + a_n |n\rangle \dots, \quad (3.8)$$

waarbij a_n willekeurige getallen zijn die je de amplitude noemt. Je kunt zeggen dat de amplitude weergeeft 'hoe sterk' iedere eigentoestand (eigenfrequentie) aanwezig is in de toon die je hoort.

BEHALVE DAT je golven kunt optellen tot een nieuwe golf, toonde Fourier ook met omgekeerde aan: Iedere periodieke functie (golf) is te schrijven als een lineaire superpositie van sinusvormige golven:

$$\text{periodieke functie} = \sum a_n \sin(nx). \quad (3.9)$$

HANDIGE APPS

Phet.colorado.edu: [Fourier: Making waves \(java-app\)](#).

Phet.colorado.edu: [Normal Modes: \(flash-app\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Superposition in an infinite well \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Expansion of eigenstates \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Energy measurements \(html5\)](#).

3.5 OPGAVEN TRILLINGEN EN GOLVEN

10. + Harmonische oscillator 1: Toestand evolutie

Maak in *Coach7* een model van een harmonische oscillator. Neem $C = 1$ en $m = 1$.

a) Toon de tijddiagrammen: (u,t) ; (v,t) ; (a,t) , en maak aparte diagrammen van (F,u) en (E,u) .

b) Laat in je model ook een diagram zien hoe de massa door de faseruimte beweegt.

Lees over een [gedempte](#) harmonische trilling. Daarvoor geldt:

$$ma = -Cu - cv \quad (3.10)$$

c) Verwerk de gedempte trilling in je model.

d) Hoe doorloopt de gedempte trilling de faseruimte?

11. Harmonische oscillator 2

Beschouw een harmonische oscillator.

+ Opgaven vergen wellicht dieper inzicht.

- a) Op welke plaats is massa het vaakst?
- b) Tegen een kans-plaats-diagram met horizontaal ($-A < u < A$) en verticaal de kans.
Stel dat de massa met een constante snelheid heen-en-weer zou gaan.
- c) Hoe ziet het kans-plaats-diagram er dan uit?

12. + Harmonische oscillator 3

Wiskundig kun je een harmonische oscillator beschrijven met een differentiaalvergelijking:

$$ma = -Cu \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2}{dt^2} u(x) = -C u(x). \quad (3.11)$$

- a) Toon aan dat de functie $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ – die de uitwijking beschrijft op een bepaald tijdstip t – een oplossing is van deze vergelijking.
- b) Wat volgt er voor het verband tussen m, C en T ?
- c) Leg uit of een harmonische oscillator meer eigenfrequenties heeft.

13. Toestandruimte

Je hebt op een aantal plekken in de natuurkunde toestanden gezien. Maak een tabel voor deze toestand-grootheden waarin je aangeeft: onderwerp / grootheden / toestand-diagram.

14. Staande en lopende golf

Kies het juiste antwoord:

- a) Bij staande/lopende golven hebben alle punten van de golf dezelfde fase.
- b) Bij staande/lopende golven hebben alle punten van de golf dezelfde amplitude.

15. + Golf-vergelijking

De franse wiskundige Jean-Beaptiste le Rond d'Alembert ontdekt in 1700 dat je een ééndimensionale golf kunt beschrijven met een differentiaalvergelijking, de golfvergelijking genaamd:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad (3.12)$$

waarbij $u(x,t)$ een functie is van de twee variabelen tijd en afstand (omdat je een functie van twee variabelen hebt, gebruiken wiskundigen kromme ∂ 's in plaats van rechte d's).

- a) Laat zien dat de functie $u(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$ voldoet aan de golf-vergelijking, waarbij $u(x,t)$ de uitwijking is op een bepaald tijdstip t op een bepaald afstand x .

Niet te verwarren met
de golf functie!

Natuurkundige werken graag met het golfgetal $k = 2\pi/\lambda$ en de frequentie $\omega = 2\pi/T$

- b) Wat vind je bij a) voor de waarde van c ?
- c) Idem voor $h(x,t) = A \exp^{(kx - \omega t)}$
- d) Leg uit welke kant (naar links of naar rechts) de bovenstaande golf

$h(x,t)$ beweegt. e) Plot de functie $g(x,t)$. (In Desmos.com, op je grafische rekenmachine of in coach moet je een vaste waarde van t nemen. Door nu telkens een andere waarde van t in te vullen (simuleren in coach) kun je de golf laten lopen; in Desmos kun je overigens t automatisch over een ingestelde range laten lopen.

f) Leg uit of superpositie van golven:

$$k(x,t) = A \sin(kx + \omega_1 t) + B \sin(kx + \omega_2 t)$$

een oplossing is van de golfvergelijking.

16. Staande golf

Een koord (een los en een vast uiteinde) bevindt zich in de 30-ste aangeslagen toestand. De grondtoestand is $3,5Hz$.

a) Bereken/bepaal de frequentie van de aangeslagen toestand.

b) Hoeveel knopen zijn er in het koord?

17. Staande golf 2

Ga naar [Phet lopende golf](#). Draai net zolang aan de frequentie (kies zelf een vast of los uiteinde) tot je de grondtoestand in het koord hebt.

a) Bereken de boven-toestanden en zoek deze op door de frequentie van de oscillator aan te passen.

b) Hoeveel boventoestanden passen in het koord? Hangt dit af van de spanning in het koord?

Beschouw een tweezijdig ingeklemd koord.

c) Laat zien dat de golflengtes van staande golven zich gedragen als een wiskundige [harmonische reeks](#).

18. Superpositie

Maak op je grafische rekenmachine of op een dynamische calculator staande golven. Doe dit zodanig dat je makkelijk het aantal knopen en buiken kunt variëren en dat je makkelijk lineaire superposities kunt maken.

Google heeft
[desmos.com](#)

19. Superpositie 2

Leg uit waarom je in (3.8) de factor a_n amplitude noemt.

20. Fourier som

a) Maak in [phet.colorado.edu: Fourier](#) een zaagtand, een blokgolf, een driehoekgolf, en een golfpakketje.

b) Hoe smal kun je de piek maken?

c) Leg uit wat er voor nodig is een oneindig smalle piek te maken.

21. Fourier som 2

a) Maak in [phet.colorado.edu: Normal modes](#) een aantal superposities met boventonen. Je kunt de boventonen 'meer of minder' luid aanzetten; er zijn oneindig veel superposities te maken.

Je kunt in een tweede tabblad ook twee-dimensionale staande golven maken zoals bijvoorbeeld in het vlies van een trommel.

b) Zoek uit waarop de terminologie (1,1), (2,1)(...) duidt.

4 WISKUNDE

4.1 COMPLEX GETAL

In groep één van de lagere school leer je tellen: $\{0, 1, 2, \dots\}$; deze verzameling van getallen noem je de *natuurlijke* getallen. In groep acht of misschien pas op de middelbare school leer $20 + x = 8$ oplossen ($x = -12$), zodat je de natuurlijke getallen kunt uitbreiden met negatieve getallen naar de verzameling van *gehele* getallen $\{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Als spoedig leer je dan $4x = 6$ met als oplossing $x = \frac{3}{2}$. *Rationale* getallen zijn: $\{\dots - 2, -\frac{81}{79}, \dots, -1, 0, \frac{3}{8}, 1, 2, \dots\}$. Nog later op de middelbare school leer je over π , e en $\sqrt{2}$ waarmee je de verzameling van getallen uitbreidt tot de *reële* getallen: $\{\dots - 6\pi, \dots - 2, -\frac{81}{79}, \dots, -1, 0, \frac{3}{8}, \dots, 1, 2, e, \dots\}$. Rond 1500 bedenken Italiaanse wiskundigen dat het handig is een getal te hebben dat een oplossing is van bijvoorbeeld $x^2 = -4$. Ze stellen voor te definiëren:

$$\sqrt{-1} \equiv i \quad \leftrightarrow \quad -1 \equiv i^2. \quad (4.1)$$

De fijne hiervan is onder andere dat je voortaan de wortel van een negatief getal kunt trekken: $\sqrt{-4} = \pm 2i$.

We noemen z een complex getal en schrijven een complex getal z in twee onderdelen: $z = x + iy$ waarbij $i = \sqrt{-1}$. Het reële deel van z is $Re(z) = a$; het imaginaire deel van z is $Im(z) = b$. Getallen waarvan het reële deel 0 is, noem je zuiver imaginair.

VOOR DE natuurkunde is het van belang te realiseren dat je het imaginaire deel van een complex getal of een complexe grootheid niet kunt meten. Een (echt, tastbaar reëel) meetinstrumenten dat we kunnen maken kan alleen maar reële getallen meten. Een complex meetinstrument bestaat niet.

Niet bedoelend
ingewikkeld.

4.2 OPERATOR, EIGENWAARDE EN EIGENFUNCTIE

Een functie werkt op getallen, bijvoorbeeld: $z = f(x, y) = x^2 + 3\sqrt{y}$. Wiskundig mag je ook zeggen: Een functie beeldt een set 'oude' getallen af op een set 'nieuwe' getallen.

Een operator doet hetzelfde als hierboven en werkt op een functie. Sommige operatoren ben je bij wiskunde al tegen gekomen maar zijn wellicht nog niet zo benoemd. Differentiëren en integreren bijvoor-

beeld:

$$\hat{D} = \frac{d}{dx} (= y'(x)), \quad \text{of} \quad \hat{I} = \int_{-a}^{+a} dx. \quad (4.2)$$

Deze operatoren kun je op de functie ‘laten werken’, bijvoorbeeld op de functie $k(x) = \sin(x)$:

$$\hat{D}k(x) = \cos(x) \text{ (een functie)}, \quad \hat{I}l(x) = 0 \text{ (een getal)}. \quad (4.3)$$

Je kunt bovenstaande lezen als een operator die van links komt en een functie die van rechts komt waarbij $\hat{D}k(x)$ iets heel anders is dan $k(x)\hat{D}$, met andere woorden je kunt de volgorde niet zo maar verwisselen.

Let op dat een operator hier twee verschillende soorten afbeeldingen maakt heeft: In het eerste geval beeldt de operator een functie af op een andere functie en in het tweede geval beeldt de operator een functie af op een getal.

HET IS handig om te weten dat sommige operatoren commutatief zijn wat wil zeggen dat de volgorde waarin je de operatoren uitvoert er niet toe doet:

$$\hat{x} \hat{p} (\sigma) = \hat{p} \hat{x} (\sigma). \quad (4.4)$$

Links laat je eerst \hat{p} en dan \hat{x} los op de toestand σ er staat dus eigenlijk: $\hat{x}(\hat{p}(\sigma))$; rechts staat het precies andersom: eerst \hat{x} en dan \hat{p} ofwel $\hat{p}(\hat{x}(\sigma))$, zie opgaven 26 en 47. Een van de moeilijkheden in de totstandkoming van de quantummechanica had te maken met het niet-commutatief zijn van operatoren. In de natuurkunde was dat nog eerder voorgekomen.

EIGENWAARDE EN eigenfunctie spelen in de quantummechanica een centrale rol. Een eigenwaarde kun je uitleggen aan de hand van een operator. Beschouw de bovenstaand operator \hat{D} en de twee functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = e^{2\pi i x/\lambda}$:

$$\hat{D}f(x) = \frac{d}{dx} e^x = 1 \cdot e^x = 1 \cdot f(x), \quad (4.5)$$

$$\hat{D}g(x) = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot e^{2\pi i x/\lambda} = \frac{2\pi i}{\lambda} \cdot g(x). \quad (4.6)$$

Zoals je ziet, beeldt \hat{D} de functies f en g af op zichzelf. Je noemt deze twee functies daarom eigenfuncties van de operator \hat{D} . In dit geval wordt f exact op zichzelf afgebeeld en wordt g afgebeeld op een waarde van $2\pi i/\lambda$ keer zo groot. De waarden 1 en $2\pi i/\lambda$ noemen we de bijbehorende eigenwaardes. Samengevat blijkt uit het bovenstaande dat operator \hat{D} onder andere als eigenfuncties heeft:

$$f(x) \text{ met als eigenwaarde } 1, \quad (4.7)$$

$$g(x) \text{ met als eigenwaarde } \frac{2\pi i}{\lambda}. \quad (4.8)$$

Het zal duidelijk zijn dat de operator \hat{D} nog oneindig veel meer eigenfuncties heeft. Samengevat: Een willekeurige operator \hat{O} heeft een eigenfunctie f_n en een eigenwaarde o_n als deze voldoet aan de vergelijking:

$$\hat{O}f_n(x) = o_n f_n(x), \quad (4.9)$$

waarbij o_n de eigenwaarde (een getal) is. De index $..._n$ geeft aan dat een operator meerdere eigenfuncties en eigenwaardes kan hebben. Omdat dit een centraal idee is de quantummechanica nog een keer in woorden wat hier staat, een operator beeldt een eigenfunctie op een een veelvoud (de eigenwaarde) van zichzelf:

$$\text{Operator} \times \text{functie} = \text{getal} \times \text{functie}. \quad (4.10)$$

4.2.1 operator als toestandveranderaar

Wiskundig kan een operator allerlei vormen aannemen en allerlei uitkomsten opleveren, al dan niet met eigenwaarden en eigenfuncties. Omdat deze introductie over quantum-natuurkunde gaat, is de vraag wat een operator natuurkundig voorstelt.

In de natuurkundig kom je een operator \hat{O} tegen als een soort 'toestandveranderaar' die een bestaande toestand verandert naar een nieuwe toestand. Bij tijdsevolutie heb je dat al gezien. De werking van een operator kun je dus ook zo opschrijven:

$$\hat{O}\sigma_t = \sigma_{t+dt}, \quad (4.11)$$

waarbij σ_t de eerste toestand is en σ_{t+dt} de latere toestand. In het licht van het begrip reversibel is handig om ook de omgekeerde operatie te kunnen uitvoeren, daarvoor gebruik je de inverse:

$$\sigma_t = \hat{O}^{-1}\sigma_{t+dt}. \quad (4.12)$$

Veel, maar beslist niet alle operatoren in de quantummechanica zijn reversibel (of hebben een inverse).

HANDIGE APPS

Phet.colorado.edu: [Function builder \(html5\)](#) operator als 'toestandveranderaar'.

4.3 VECTOR

Een vector is een ding dat voldoet aan slechts twee eisen:

- Als je twee vectoren lineair bij elkaar optelt (superponeert), krijg je weer een vector:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{z}. \quad (4.13)$$

- Als je een vector vermenigvuldigt met een getal, krijg je weer een vector:

$$\alpha \vec{v} = \vec{w}. \quad (4.14)$$

Merk op dat deze beide eigenschappen ook gelden voor golven (sinus-functies): (a) Je kunt golven optellen (interferentie), en (b) je kunt een golf vermenigvuldigen met een grotere amplitude (dan wordt de golf sterker).

EEN VECTOR in twee dimensies kun je aan aangeven met twee getallen die zeggen hoe deze vector is opgebouwd uit de eenheidsvectoren \hat{e}_n . Dat kan enerzijds als een kolom-vector:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = 2 \times \hat{e}_x + 3 \times \hat{e}_y; \quad (4.15)$$

en anderzijds als een rij-vector:

$$\vec{v} = (4,5) \rightarrow \vec{v} = 4 \times \hat{e}_x + 5 \times \hat{e}_y. \quad (4.16)$$

HET INPRODUCT van twee vectoren bereken je als:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \text{een getal}. \quad (4.17)$$

Het uitproduct van twee vectoren is een vector: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{x}$.

Let op dat het inproduct van twee vectoren altijd een getal is; en niet een vector. Om de lengte van een vector te krijgen, neem je het inproduct van een vector met zichzelf, dat levert Pythagoras:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2}. \quad (4.18)$$

EEN GENORMALISEERDE vector is een vector met een lengte van 1. Iedere vector kun je normaliseren door deze te delen voor z'n lengte:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (4.19)$$

Het inproduct van een eenheidsvector met zichzelf is altijd 1 en het inproduct met een andere eenheidsvector is altijd nul:

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = (1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \quad (4.20)$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = (1,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.21)$$

Dat een inproduct nul is, wil zeggen dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan. Dit noem je onafhankelijk wat inhoudt dat je twee loodrechte vectoren niet uit elkaar kunt opbouwen.

HANDIGE APPS

Phet.colorado.edu: [Vector addition: \(flash-app\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Eigen vector \(html5\)](#).

4.4 BRA-KET EN OPERATOR

Behalve dat Dirac in 1939 een toestand gaat schrijven als een ket, stelt hij ook voor om een (quantum)toestand als een vector te schrijven. In twee dimensies is een toestand (een ket-vector) te noteren als:

$$|v\rangle \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Daarnaast benoemt hij de rij-vector een bra-vector:

$$\langle w| \equiv (x, y). \quad (4.23)$$

Ook stelt Dirac voor het inproduct van twee vectoren $\vec{v} \cdot \vec{w}$ te schrijven als:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \langle v| \cdot |w\rangle \equiv \langle v|w\rangle = v_1 w_1 + w_2 w_2 = \text{getal}. \quad (4.24)$$

Zoals eerder: Een inproduct levert altijd een getal op.

Met Diracs bra-ket notatie kun je handzaam werken. Neem het inproduct van bijvoorbeeld twee eenheidsvectoren en schrijf die eenheidsvectoren als kets, waarbij: $\hat{e}_x = |0\rangle$ en $\hat{e}_y = |1\rangle$ dan volgt:

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \langle 0|0\rangle = 1; \quad (4.25)$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \langle 0|1\rangle = 0. \quad (4.26)$$

Bovenstaande gaat echter op voor alle ket-vectoren die loodrecht en genormaliseerd zijn. Als $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ loodrecht en genormaliseerd zijn, dan geldt net als hierboven:

$$\langle \uparrow|\uparrow\rangle = \langle \downarrow|\downarrow\rangle = 1;$$

$$\langle \uparrow|\downarrow\rangle = \langle \downarrow|\uparrow\rangle = 0.$$

Je kunt het bovenstaande inproduct ook anders bekijken. Diracs logica laat zien is dat een bra een ket-vector afbeeldt op een getal: $\langle \dots|\dots\rangle = \text{getal}$. Een bra is in die zin dus een soort operator: $|\dots\rangle \equiv \hat{O}$.

In een logisch vervolg kun je vragen wat het betekent als je de volgorde van bra en ket omdraait en je opschrijft:

$$|\dots\rangle \langle \dots| = \text{....?} \quad (4.27)$$

Dat wordt duidelijk als je $|\dots\rangle\langle\dots|$ vermenigvuldigt met een ket:

$$|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\cdot|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \times 1 = |\uparrow\rangle. \quad (4.28)$$

Kennelijk beeldt het ding $|\dots\rangle\langle\dots|$ een ket af op een andere ket. Dat komt je vermoedelijk bekend voor van vergelijking 4.11:

$$\hat{O}|a\rangle = |b\rangle \quad \leftrightarrow \quad |\dots\rangle\langle\dots| \cdot |a\rangle = |b\rangle. \quad (4.29)$$

Beide werkingen van de bra- en ket, afbeelden op een getal of afbeelden op een andere ket, herken je van de eerder genoemde operator uit paragraaf 4.2.

BRA, KET en operatoren lijken een wat ingewikkelde manier om vectoren op te schrijven. Maar de stap die Dirac maakt, is het inzicht dat een deeltje zich in een quantum-toestand (de complexe golffunctie van Schrödinger, zie opgave 48) bevindt en dat je die toestand beschrijft met een vector (die je schrijft als een ket):

$$|\psi(x,t)\rangle. \quad (4.30)$$

Als je eenmaal wat meer met bra's, kets en operatoren werkt, zul je merken dat je de hele wiskunde van complexe golffuncties en vectoren gaat vergeten. Een ket is dan gewoon een abstracte weergave van een toestand.

EEN KORTE samenvatting:

$|\dots\rangle$ ket-vector;
 $\langle\dots|$ bra-vector; maakt van een ket een getal;
 $|\dots\rangle\langle\dots|$ operator; maakt van een ket een andere ket.

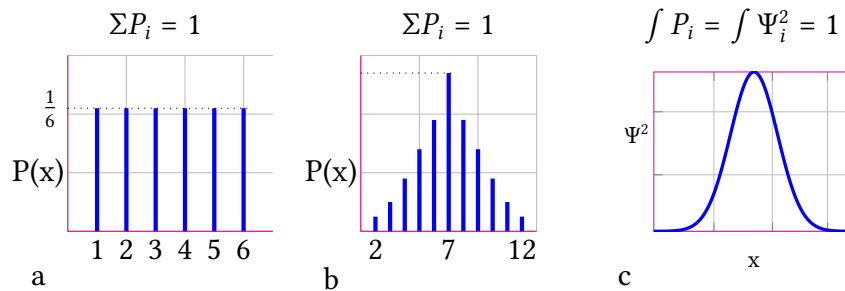
En tot slot handig:

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1; \quad (4.31)$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0. \quad (4.32)$$

4.5 KANS(VERDELING)

Neem, voor een zuivere dobbelsteen, X als het aantal ogen dat je gooit. De kans dat je één gooit geef je aan als: $P(1) = \frac{1}{6}$ en $P(2) = \frac{1}{6}$ enz... Een kansverdeling geeft aan hoe groot de kans dat je een bepaalde waarde gooit. Hoewel voor een dobbelsteen wat triviaal, kan het soms overzichtelijk zijn om een kansverdeling te tekenen (figuur 4.1).



Figuur 4.1 – Theoretische kans- of waarschijnlijkheidsverdeling: (a) Bij een dobbelsteen; (b) bij twee dobbelstenen; en (c) bij een deeltje in een potentiaalput.

Voor toevalsprocessen is de afspraak dat de som van alle kansen één is:

$$\sum_n P_n = 1. \quad (4.33)$$

HET GEMIDDELDE van alle mogelijkheden is:

$$\langle X \rangle = \sum_n P(x_n) \cdot x_n. \quad (4.34)$$

Bij een meting aan een quantumstelsel wil je vaak graag voorspellen wat de gemiddelde waarde van de uitkomsten gaat zijn, daarom praten natuurkundigen over de verwachtingswaarde. Dat is hetzelfde als het gemiddelde (maar dan van tevoren uitgerekend).

HANDIGE APPS

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Block on a track \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Classical oscillator a track \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Plinko probability \(html5\)](#).

Australian National University levert gratis [Quantum Random Numbers Server \(site, live-stream\)](#).

4.6 OPGAVEN WISKUNDE

22. Complex getal

Neem: $z_1 = 2 + 3i$ en $z_2 = 1 - 2i$.

a) Bereken: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$.

b) Bewijs: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

23. Complex assenstelsel

Teken een (Re, Im) -assenstelsel. (Is dat hetzelfde als (x, iy) -assenstelsel?)

a) Plaats in je figuur $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 1 - 2i$; z_1^* ; z_2^* ; $z_1 + z_2$; en $z_1 - z_2$.

24. Eigenwaarde-vergelijking

Beschouw de operator $\hat{K} = \frac{d^2}{dx^2}$ en de eigenwaardevergelijking (zie 4.9):

$$\hat{K} y = k y. \quad (4.35)$$

- a) Toon aan dat de functies $f(t) = e^{+3t}$ en $g(t) = e^{-3t}$ eigenfuncties zijn van de operator \hat{K} .
- b) Wat zijn de eigenwaarden van f en g ?
- c) Toon aan dat de lineaire superpositie: $h = 0,56f + 0,83g$ ook een oplossing is van de eigenwaardevergelijking.

25. Eigenfunctie

- a) Zoek enkele eigenfunctie's van de operator $\hat{K} = \frac{d^2}{dx^2}$.
- b) Geef ook telkens de eigenwaarde.
- c) Toon aan dat de (superpositie) functie $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ ook een oplossing is van de operator \hat{K} .
- d) Is $h(x)$ een eigenfunctie van \hat{K} ?

26. Rotatie: Niet commutatief?

Leg je mobiel (of een dobbelsteen) op tafel en definieer de x, y, z assen. Definieer vervolgens:

- i) de operator \hat{X} als een rotatie van $+\pi/2$ om de x -as;
- ii) de operator \hat{Z} als een rotatie van $+\pi/2$ om de z -as.

Toon aan dat $\hat{X}\hat{Z} \neq \hat{Z}\hat{X}$ (doe bijvoorbeeld op de dobbelsteen $\hat{X}\hat{Y}|1\rangle$ en daarna $\hat{Y}\hat{X}|1\rangle$).

27. Vector definitie

- a) Laat zien onder welke voorwaarde de verzameling \mathbb{Z} van gehele getallen vectoren zijn.
- b) Leg uit of je de eigenfrequenties van een dwarsfluit als vectoren kunt beschouwen.
- c) Laat zien dat de functies: $f(x) = ax$ (met a willekeurig), vectoren zijn.

28. Inproduct

- a) Toon met een berekening aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ loodrecht zijn.
- b) Normaliseer beide vectoren.
- c) Teken alle vier de vectoren.
- d) Wat is het verband tussen enerzijds de eenheidsvectoren \hat{e}_x en \hat{e}_y en anderzijds de twee genormaliseerde vectoren die je zojuist hebt berekend?

29. + Loodrechte eigentoestand

Je zag eerder dat het inproduct van verschillende loodrechte vectoren nul is. Dat wil ook zeggen dat je de ene vector niet kunt opbouwen uit andere vectoren: $\hat{e}_z \neq \hat{e}_x + \hat{e}_y$ of iets dergelijks.

Voor de eigentoestanden van een gitaarsnaar geldt dit ook: Alle eigentoestanden van de gitaar zijn loodrecht, waarbij je niet zozeer zegt dat ze loodrecht op elkaar staan, dan wel dat het inproduct van de twee eigenfuncties nul is: Dat je een boventoon niet kunt opbouwen uit

andere boventonen. Neem als eigentoestanden van de gitaarsnaar:

$$y_1 = \sin(x); \quad (4.36)$$

$$y_2 = \sin(2x). \quad (4.37)$$

a) Teken beide functies op het domein $[-\pi; +\pi]$

Het inproduct van functies definieer je als:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f(x)g(x)dx. \quad (4.38)$$

Dat toegepast op de bovenstaande eigenfuncties:

$$y_1 \cdot y_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x) \sin(2x)dx. \quad (4.39)$$

b) Toon aan dat bovenstaand inproduct nul is.

c) Leg in woorden uit wat je hebt aangetoond.

30. Twee cbits

Je beschikt over een systeem van twee cbits.

a) Geef in ket-notatie de vier mogelijke toestanden van dit systeem.

b) Als je een systeem hebt van vier cbits hebt, hoeveel mogelijke toestanden kan dit systeem aannemen?

c) Kun je een andere aanduiding geven voor de toestand $|0111\rangle$?

31. Loodrechte spin?

Spin van elektronen of andere kleinste deeltjes geef je dikwijls aan met $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$. Spin mag je toevoegen aan het rijtje van eigenschappen van puntvoorwerpen: massa, lading en spin. Een klassieke uitleg voor spin is een tolletje dat draait om z'n as.

a) Wat is hoek tussen de assen van twee klassieke tollen in de $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ toestand?

b) Bereken het klassieke inproduct van deze twee vectoren.

Voor quantum-spin is dit anders: Het inproduct $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle \equiv 0$

c) Wat verwacht je van de hoek tussen de 'assen' van de quantumspin?

32. Evolutie operator

Je beschikt over een systeem dat zich in de toestand $|+\rangle$ bevindt. Deze toestand bewerk je met de evolutie-operator \hat{X} :

$$\hat{X} = |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|. \quad (4.40)$$

a) Geef de toestand na de bewerking.

Wat je zojuist hebt gedaan, is een foton in de +richting omdraaien naar de -richting.

33. Toestand evolutie

Beschouw de toestand-ruimte van een digitale munt: $|0\rangle$ en $|1\rangle$. De begintoestand is $|0\rangle$. Een evolutie-operator kan zijn:

$$\hat{T} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad (4.41)$$

Toon aan dat deze evolutie-operator leidt to de tijd-serie 010101010 ...

34. Toestand evolutie 2

Een dobbelsteen heeft als toestanden: $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle$. Een operator voor evolutie kan zijn:

$$\hat{T} = |2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 6| + |6\rangle\langle 2|. \quad (4.42)$$

- a) Bereken de evolutie van toestanden als de begintoestand $|4\rangle$ is.
- b) Welke eigenschap wordt behouden?

35. Gemiddelde

- a) Toon aan dat verwachtingswaarde van een dobbelsteen 3.5 is.
- b) Leg uit waarom het woord 'gemiddelde' hier een misleidend woord is.

36. Kansverdeling

Je hebt twee dobbelstenen waarmee je gooit. X is het totale aantal ogen dat je gooit.

- a) Maak een theoretisch kans-verdelingsdiagram met op de horizontale het aantal ogen; en verticaal de kans die hoort bij iedere meting.
- b) Bereken de verwachtingswaarde.
- c) Hoe lang moet je gooien voordat geldt: $x_{\text{gem}} = \langle x \rangle$?
- d) Wat kun je zeggen over de vorm van het kans-verdelingsdiagram als je met steeds meer dobbelstenen gaat gooien?

37. Random walk

38. Gauss' functie

Johann Carl Friedrich Gauss was een Duits wiskundige en werkte rond 1795 aan onder andere de (kansverdelings)-functie:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (4.43)$$

- a) Schets hoe een (y,x) diagram van Gauss' functie er uit ziet.
- b) Plot de functie op je GR of in desmos.
- c) Bekijk de functie $f(x) = e^{-(x-4)^2}$. Kun je – zonder berekening – de verwachtingswaarde geven?
- d) Leg uit of je het begrip verwachtingswaarde bij deze Gauss-functie, wel/niet vindt passen.
- e) Plot deze functie.

Deze functie wordt vaak aangeduid als een normaalverdeling.

39. Toevalgenerator

- a) Laat je GR tien toevalsgetallen genereren en rond af naar nul of één.
- b) Reset je GR, en laat opnieuw een serie genereren. Is het dezelfde reeks?
- c) Reset je GR opnieuw en laat weer een serie genereren. Is het dezelfde reeks?

De firma random.org beweren wel random getallen te kunnen leveren. Maar een betere toevalsgenerator is gebaseerd op een [quantum systeem](#).

40. + Verwachtingswaarde

Vrij naar Bowman 2008.

Je meet een grootheid r aan een quantumstelsel dat maar drie meetuitkomsten kent:

$$r_j = \frac{k}{j^2}(-1)^j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.44)$$

De kans dat je een bepaalde meetwaarde r_j meet, wordt gegeven door het kwadraat van het getal c_j : $P(r_j) = c_j^2$. Het stelsel is voorbereid in een toestand met de amplitudes:

Geprepareerde toestand.

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{5}{15}}; \quad c_3 = \frac{3i}{\sqrt{15}}. \quad (4.45)$$

Je doet een serie van 75 metingen. Je meet:

6 keer r_1 ; 22 keer r_2 en 47 keer r_3 .

- Leg uit of het aantal metingen in overeenstemming kunnen zijn met de verachtte aantallen.
- Bereken de verwachtingswaarde van de operator.
- Bereken gemiddelde waarde van de metingen.

5 QUANTUMMECHANICA

In dit hoofdstuk kom je vaak Diracs versie van h tegen: $\hbar = h/2\pi$; dat heeft te maken met de voorkeur in de natuurkunde om te praten over het golfgetal: $k = 2\pi/\lambda$ en de hoekfrequentie: $\omega = 2\pi/T$.

5.1 VWO QUANTUMWERELD: EEN SAMENVATTING

De syllabus natuurkunde vwo bevat domein F1: Quantumwereld. Hier volgt een samenvatting.

Groenen e.a. [2014](#)

Eind negentiende eeuw zijn er in de natuurkunde een aantal experimenten op het niveau van atomaire afmetingen waarvan de uitkomsten hardnekkig door de (later genoemd klassieke) natuurkunde niet voorspeld kunnen worden: (a) wat is verklaring van het zwarte-straler-spectrum, (b) waarom kan licht een geladen metaal ontladen (het foto-elektrisch effect genaamd), (c) waarom tonen gassen lijnenspectra, (d) hoe ziet een atoom eruit (wat is dat kleine negatieve deeltje), (e) wat is de verklaring voor de soortelijke warmte bij temperaturen vlak boven het absolute nulpunt. En dan was er nog een Zwitser die op zoek was naar de onvindbare ether).

MAX PLANCK geeft in 1900 een verklaring voor het (probleem a) zwarte-straler-spectrum. Hij laat zien dat straling energie heeft dat uitsluitend afhangt van de frequentie:

$$E = hf \quad \text{met} \quad h = 6.62606957(29) \cdot 10^{-34} \text{ Js.} \quad (5.1)$$

Albert Einstein maakt in 1904 gebruik van Plancks wet en introduceert het lichtdeeltje (een foton) en verklaart daarmee (probleem b) het foto-elektrisch effect:

$$E_{\text{kin}} = hf - W_u. \quad (5.2)$$

Let op dat licht een soort continue golf is in de klassieke natuurkunde. Einstein maakt 'golfpakketjes' van licht.

Ernest Rutherford (in 1902) en Niels Bohr (in 1913) komen met een model van het atoom dat de laatste drie onbegrepen experimenten verklaart. Ze beschouwen (probleem e) het atoom als een soort planetenstelsel van elektronen in banen om een kern. Een elektron (probleem d) is een negatief geladen deeltje met een massa veel kleiner dan een proton. Het lukt Bohr om met dat model een beschrijving te geven

van de spectrum van waterstof. Elektronen bevinden zich volgens dit model in vaste banen met een specifieke – gequantiseerde – waarde van energie:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}. \quad (5.3)$$

Bohr-model waterstof.

De banen, aangeduid met n , zijn telbaar en daarmee zijn de energieën gequantiseerd. Een elektron kan naar een andere baan. Dat is alleen mogelijk: (probleem c) omhoog door absorptie van een foton met $\Delta E = hf$, en (b) omlaag door emissie van foton met $\Delta E = hf$. Let op dat het idee van de energiesprong juist is maar – blijkt met de verdere ontwikkeling van de quantummechanica – dat het Bohr-model volstrekt onjuist is.

NU NATUURKUNDIGEN de klassieke problemen eindelijk beginnen te begrijpen, ontstaat er een koortsachtige ontwikkeling van een theorie die later de *Quantenmechanik* (Duits) is genoemd.

De Franse prins Louis de Broglie postuleert in 1924 dat een deeltje zich ook kan gedragen als een golf met een golflengte:

$$\lambda = h/p. \quad (5.4)$$

De jonge Werner Heisenberg formuleert in 1924 de eerste quantumtheorie van spectraallijnen in de vorm van kansen, operatoren en eigenwaarden. Een paar jaar later verklaren Bohr en Heisenberg samen het Bohr-model uit 1913 ‘dood’, er is slechts de uitkomst van de meting geleverd door een operator. ‘We weten niet hoe een atoom eruit ziet als we niet kijken.’ Heisenberg theorie bevat het onbepaaldheidsprincipe (zie opgave 47):

$$\Delta x \Delta p \geq h/2\pi. \quad (5.5)$$

Omdat Erwin Schrödinger niet tevreden is over de abstracte kansen-theorie van Heisenberg, publiceert hij een volgens hem beter fysisch voorstelbare theorie gebaseerd op de materie-golven van de Broglie. Schrödinger praat over een golffunctie Ψ , (zie opgave 48). Helaas voor Schrödinger blijkt zijn golffunctie een ding te zijn met een complex getal waaraan je niet direct kunt meten (complexe grootheden kun je immers niet meten met reële instrumenten). Sterker nog: Max Born laat zien dat Heisenbergs en Schrödingers theorie twee kanten van dezelfde medaille zijn en beide kansen bevatten, in het geval van Schrödinger blijkt:

$$\text{kans} \propto \Psi^2. \quad (5.6)$$

STOP EEN deeltje in een oneindig diepe ééndimensionale energieput (doos). Omdat het deeltje niet voorbij de randen kan zijn, moet de golffunctie daar precies nul zijn. Met andere woorden: het deeltje in

de doos kan zich niet voorbij de rand van de doos bevinden. Van dit model kun je energieniveau's berekenen met:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \quad (5.7)$$

waarbij L de breedte van de put en m de massa van het deeltje, zie opgave 50.

Bij een eindig-diepe doos, kan de golffunctie enigszins indringen in de randen. Een gevolg daarvan is dat er een kleine kans is dat je het deeltje zich even iets buiten de put (en in de wand) kunt meten. Klassiek gezien is dit natuurlijk onmogelijk! Het waterstof atoom lijkt wel enigszins op het eindig-diepe-doosje met een energiediepte van -13,6 eV, en de energieniveau's volgens zie vergelijking 5.3.

Indringing kan nog een ander effect hebben. Als de golffunctie indringt in een wand die dun is, kan het voorkomen dat de golffunctie in de wand weliswaar afneemt maar aan de andere van de wand ook een (geringe) waarde heeft. Er is dus een (kleine) kans dat je het deeltje in de put opeens buiten de put meet. Dit effect heet tunneling. De kans op tunneling hangt af van de dikte van de wand en van de hoogte van de wand. Realiseer je dat de energie van het deeltje na de tunneling onveranderd is.

HOEWEL QUANTUMMECHANICA veel aan atomen meet en rekt, is de theorie niet een atoomtheorie of iets dergelijks. John Gribbin schrijft daarover:

Gribbin 1984, p. 123

'There is no model of what the atom and elementary particles are really like. And nothing tells us what goes on when we are not looking at them. But the equations of quantum mechanics can be used to make predictions on a statistical basis. If we make an observation of a quantum system and get the answer A to our measurement, then the quantum equations tells us what the probability is of getting answer B (or C or D or whatever) if we make the same observation a certain time later. Quantum theory does not say what atoms are like, or what they are doing when we are not looking at them.'

Quantummechanica is slechts een theorie dat je moet gaan hanteren als je metingen gaat doen aan systemen op atomaire schaal en kleiner; dat kan zijn aan atomen maar dat kan ook zijn aan licht en aan quarks en strings. De quantummechanica legt daarnaast het fundament over hoe je tegen zaken als elektrische en magnetische velden moet aankijken: Ook die blijken gequantiseerd.

HANDIGE APPS

Over klassieke problemen

Physics flash animations: [Thomson's experiment e/m \(flash\)](#).

Phet.colorado.edu: [Zwarte straler \(flash\)](#).

Phet.colorado.edu: [Neon lights and other discharge lamps \(java-app\)](#).

Walter-Fendt.de: [Foto-elektrisch effect \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Foto-elektrisch effect \(java-app\)](#).

Phet.colorado.edu: [Rutherford scattering \(java-app\)](#).

Over het Bohr-model

Walter-Fendt.de: [Bohr-model \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Models of Hydrogen \(java\)](#).

Astro.anl.edu: [Hydrogen Atom simulator \(html5\)](#).

Universiteit Toronto [Bohr-model waterstof \(html5\)](#).

Over dualiteit

Walter-Fendt.de: [diffractie dubbele spleet \(html5\)](#).

Walter-Fendt.de: [diffractie dubbele spleet \(html5\)](#).

Phet.colorado.edu: [Davisson-Germer: Electron diffraction. \(java-app\)](#).

5.2 REGELS VAN DE QUANTUMMECHANICA

Postulaten, regels, wetten, axioma's? Filosofen vinden: Een postulaat is het beginpunt van een redenering. Daarom is een postulaat niet bewijsbaar. Newtons drie wetten kun je opvatten als postulaten, je zou kunnen zeggen dat Newton die wetten 'uit de natuur' heeft geplukt. De wetten zijn niet bewijsbaar, de natuur gedraagt zich toevallig zo. Die wetten mag je ook regels, postulaten of axioma's noemen, sommige benaming klinken gewoon wat strenger (alsof je er meer verstand van hebt).

HET DOEL van deze *introduction* is je een inzicht te geven in de structuur van de quantummechanica. Een manier om dat te doen is door de regels te bestuderen waarop de theorie is opgebouwd.

Regel 1 *De quantumtoestand $|\Psi\rangle$ bevat alle informatie van een quantumstelsel. De toestand bevindt zich in een quantum-toestandruimte.*

Denk hierbij aan de faseruimte waarmee je een klassiek-systeem kunt beschrijven: Een punt in de (klassieke) faseruimte vertelt je alles wat je nodig hebt om een klassiek systeem te begrijpen, zie paragraaf 2.2. De eerste regel van de quantum zegt hetzelfde voor de quantumtoestand: Er

Dat is de Hilbert ruimte:
Een oneindig
dimensionale complexe
ruimte.

is een soort ‘quantum-faseruimte’ waarin je iedere quantumtoestand als een ket kunt weergeven. Weet je de quantumtoestand dan weet je alles van het quantumstelsel dat nodig is om de rest te doen: Ontwikkelen in de tijd of meten.

Als je terugdenkt aan wat eerder over toestanden is gezegd, kun je vermoeden dat een quantumstelsel (bijvoorbeeld het deeltje in een doos opgave 50) waarschijnlijk: (a) heel veel verschillende toestanden heeft, (b) dat er zoiets als eigen-(quantum)toestanden bestaan, en (c) dat er wel weer superpositie zal gaan plaatsvinden. (Allemaal correct.)

Een quantumstelsel kan een stelsel zijn van een deeltje in een doos, een elektron in een twee-spleten experiment, protonen die botsen of sinds een aantal jaar een buckyball (een C-60 molecuul) die door een twee-spleten experiment gaat.

Arndt e.a. 1999, zie [nature](#).

De toevoeging ‘bevat alle informatie’ beweert dat alles wat je aan het quantumstelsel wil meten, in de quantumtoestand $|\Psi\rangle$ zit opgesloten. De quantumtoestand is een soort envelop waarin alle informatie zit over het deeltje. Anders gezegd: Als je de impuls-operator op de quantumtoestand los laat, krijg je een waarde van de impuls; als je de energie-operator op de quantumtoestand loslaat, meet je de energie van het stelsel, enzovoort.

Tot slot: Deze regel is nodig voor de beschrijving van quantummechanica, maar de eerste regel geeft volstrekt geen informatie over wat een quantumtoestand is noch wat een quantum-toestandsruimte is. De eerste regel geeft alleen maar aan hoe je een quantum-systeem kunt bestuderen: Door naar de quantumtoestand in de quantum-toestandsruimte te kijken.

Regel 2 *De Schrödinger-vergelijking beschrijft hoe een quantumtoestand zich ontwikkelt in de tijd:*

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi\rangle. \quad (5.8)$$

Aan de linkerkant van de vergelijking zie je het complexe getal i , de Planck-constante en de afgeleide van de quantumtoestand naar de tijd $\partial/\partial t |\Psi\rangle$. Aan de rechterkant zie een operator en opnieuw de quantumtoestand. Hoewel de Schrödinger-vergelijking lijkt op een eigenwaardevergelijking, is het dat niet.

DE SCHRÖDINGER-vergelijking heeft veel overeenkomst met de klassieke (Newtons) evolutiewet $F = ma$. Deze laatste zegt hoe je de toestand van een deeltje evolueert in de tijd als er krachten op het deeltje werken. Evolutie houdt ook in dat de toestand $\sigma(x,p)$ (reversibel) beweegt door de klassieke faseruimte, waarbij reversibel duidt op het heen-en-weer kunnen gaan in de tijd.

Schrödinger doet hetzelfde voor de quantumtoestand $|\Psi\rangle$. Aan de linkerkant van de vergelijking zie je een afhankelijkheid van de tijd in de vorm van $\partial/\partial t$ wat direct de update-vergelijking geeft die oude quantumtoestand $|\Psi_t\rangle$ brengt naar de nieuwe quantumtoestand $|\Psi_{t+dt}\rangle$. Zo beschouwd is Schrödinger-evolutie een operator \hat{U} die bovendien reversibel blijkt te zijn:

$$\hat{U} |\Psi_t\rangle = |\Psi_{t+dt}\rangle \quad \leftrightarrow \quad |\Psi_t\rangle = \hat{U}^{-1} |\Psi_{t+dt}\rangle, \quad (5.9)$$

waarbij \hat{U}^{-1} de inverse operator is. Evolueren van een quantumtoestand heeft tot gevolg dat deze 'beweegt' door quantum-toestandsruimte en de inverse operator zorgt dat het een reversibele proces is zodat je ook in de quantum-toestandsruimte heen-en-weer kunt in de tijd.

Een andere manier om met de Schrödinger-vergelijking om te gaan is door beide zijden van de vergelijking te integreren. Dit levert de (tijdsafhankelijke) golffunctie op die natuurlijk ook weer aangeeft hoe de quantumtoestand door quantum-toestandsruimte beweegt.

HOE DE quantumtoestand evolueert in de tijd, hangt af van de rechterzijde van de vergelijking met de operator \hat{H} , die dikwijls lastige vormen heeft.

In sommige eenvoudige gevallen is de operator \hat{H} echter niet afhankelijk van de tijd: $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$. In die gevallen kun je de Schrödinger-vergelijking splitsen in een tijdsafhankelijk deel en een tijdsafhankelijk deel (de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = E |\phi(t)\rangle \quad \wedge \quad \hat{H} |\psi(x)\rangle = E |\psi(x)\rangle. \quad (5.10)$$

Links zie je de evolutie in de tijd en rechts staat de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking wat hier wel een eigenwaarde-vergelijking is. In dit specifieke geval mag je de quantumtoestand schrijven als het product van de twee functies:

$$|\Psi(x,t)\rangle = |\phi(t)\rangle \cdot |\psi(x)\rangle, \quad (5.11)$$

waarbij $\phi(t)$ alleen afhangt van de tijd en $\psi(x)$ alleen afhangt van de plaats.

Regel 3 Een grootte die je kunt meten, heeft de vorm van een operator: \hat{O} . Een quantum-operator (een quantum-grootte) heeft eigentoestanden en reële (=niet complexe) eigenwaarden.

Wat je bijvoorbeeld ziet bij de impuls-operator \hat{p} en de energie-operator \hat{H} in opgave 47. Volgens deze regel voldoet iedere quantum-operator \hat{O} aan de eigenwaardevergelijking hier geschreven met de quantumtoestand:

$$\hat{O} |\Psi_n\rangle = o_n |\Psi_n\rangle, \quad (5.12)$$

waarbij $|\Psi_n\rangle$ een eigentoestand is van het quantumstelsel en o_n een eigenwaarde (een getal), zie paragraaf 4.2. Sommige operatoren hebben discrete (gequantiseerde) eigenwaarden (de energieoperator); andere operatoren hebben continue eigenwaarden (de impuls-operator).

Regel 4 *Als een quantum systeem zich bevindt in een eigentoestand $|\Psi_n\rangle$ van een operator (=grootte), dan levert meting van die operator, de eigenwaarde die hoort bij de betreffende eigentoestand:*

$$\hat{O} |\Psi_n\rangle = o_n |\Psi_n\rangle, \quad (5.13)$$

met \hat{O} een operator en o_n een getal.

Deze regel vertelt eindelijk wat een meting inhoudt: Een meting van een grootte aan een quantumstelsel $|\Psi\rangle$ levert een eigenwaarde op. Ten minste, als het quantumstelsel zich in een eigentoestand van een operator bevindt.

Regel 5 *Iedere willekeurige toestand van een systeem is te beschrijven als een superpositie van de eigentoestanden van een operator:*

$$|\Psi\rangle = \sum a_n \cdot |\Psi_n\rangle = a_1 |\Psi_1\rangle + a_2 |\Psi_2\rangle + \dots, \text{ waarbij:} \quad (5.14)$$

$$\sum a_n \cdot a_n^* = 1. \quad (5.15)$$

Meting aan een superpositie levert – met een kans van a_n^2 – een eigenwaarde o_n bij de eigentoestand $|\Psi_n\rangle$. Direct na een meting bevindt het quantumstelsel zich in de gemeten eigentoestand.

Deze regel vertelt twee zaken. Allereerst zie je dat je iedere toestand kunt opbouwen uit de eigentoestanden van een operator. Dat lijkt erg op wat Fourier zei over een periodieke functie die je altijd kunt opbouwen uit sinusvormige golven met verschillende frequenties, zie vergelijking 3.7.

Daarnaast vertelt deze regel wat een meting inhoudt: Het veroorzaakt Bohrs ‘instorten van de golf functie’ of ‘reductie van de quantumtoestand’. De oude complete toestand met alle superposities is verdwenen en de golf functie bevindt zich in één van de eigentoestanden. Welke dat is, weet je niet van tevoren. Zoals in de inleiding al gezegd over het verschil tussen de klassieke en de quantum natuurkunde: Klassiek kun je aangeven wat de vorige toestand was, maar in de quantum-natuurkunde kan dat niet meer. Meten in de quantum is een irreversibel proces.

Meting aan een quantumtoestand kun je opnieuw beschrijven als het uitvoeren van een operator \hat{M} op een toestand waarbij een nieuwe (geupdate) toestand ontstaat. Meten in z'n algemeenheid (aan een superpositie) geef je dan aan als:

$$\hat{M} |\Psi_t\rangle = |\Psi_{t+dt}\rangle (= |\Psi_k\rangle), \quad (5.16)$$

St Andrews
eigentoestanden

waarbij k één van de eigentoestanden is. De \hat{M} -operator is niet reversibel wat wil zeggen dat je de oude toestand niet kunt terughalen uit de nieuwe toestand na de meting:

$$\hat{M}^{-1} |\Psi_{t+dt}\rangle \neq |\Psi_t\rangle. \quad (5.17)$$

Samengevat zegt de vijfde regel over een quantummeting dat je van te voren: (a) alle uitkomsten kunt aangeven, (b) de kans kunt aangeven bij iedere uitkomst en (c) de gemiddelde waarde van alle mogelijke metingen (de verwachtingswaarde) kunt uitrekenen. En je kunt echter niet aangeven (omdat \hat{M} niet reversibel is) welke precieze uitkomst je bij een meting gaat vinden.

HANDIGE APPS

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Superposition in an infinite well \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Expansion of eigenstates \(html5\)](#).

st-andrews.ac.uk/physics/quvis/: [Energy measurements \(html5\)](#).

5.3 QUANTUMREGELS IN EEN NOTENDOP

Quantummechanica gaat over het voorspellen van uitkomsten van metingen op atomaire schaal (zeg 10^{-10} m). Het experiment en het uitvoeren van een meting is wat quantummechanica (geformuleerd na 1900) onderscheidt van klassieke natuurkunde (de natuurkunde van voor 1900).

De toestand van een systeem op atomaire schaal (een elektron, fotonen, ...) beschrijf je met een vector $|\Psi\rangle$ in de quantum-toestandruimte. Die toestand (richting en lengte van de vector) kan heel precies bekend zijn. De toestand is een envelop voor alle informatie die je zou willen weten van het quantum systeem (**regel 1**).

De toestand $|\Psi\rangle$ evolueert in de tijd volgens de Schrödinger-vergelijking (**regel 2**):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle.$$

Omdat je de begintoestand (plaats in de quantum-toestandruimte) van een quantumsysteem heel goed kent, kun je ook heel precies uitrekenen hoe een toestand evolueert en hoe een toestand er later in de tijd uit ziet. Updaten volgens Schrödinger-vergelijking in de tijd is een reversibel proces.

Iedere grootheid die je wilt meten aan een quantumsysteem, heeft de vorm van een operator \hat{O} met reële eigenwaarden (**regel 3**).

Als je meet met een operator \hat{O} aan een eigentoestand van een quantumsysteem $|\Psi_n\rangle$, dan is de uitkomst altijd de bijbehorende (reële) eigenwaarde (**regel 4**):

$$\hat{O} |\Psi_n\rangle = o_n |\Psi_n\rangle,$$

Dit is *altijd* het geval.

Tot slot, een willekeurige toestand van een quantumsysteem is dikwijls een superpositie van eigentoestanden. Meting aan een superpositie ($|\Psi\rangle = a_1 |\Psi_1\rangle + a_2 |\Psi_2\rangle + \dots$) levert – met een kans van a_n^2 – een eigenwaarde o_n bij de eigentoestand $|\Psi_n\rangle$. Direct na een meting bevindt het quantumsysteem zich in de gemeten eigentoestand, (**regel 5**).

HET MAG duidelijk zijn dat de eerste vier regels van de quantummechanica heel duidelijk zijn in de zin dat de theorie ‘reversibele’ uitspraken doet. Quantummechanica is hier dus zeer voorspelbaar en heel precies. Voorzover je dacht dat quantum een vage en onbegrepen theorie is, deze regels laten exact het tegenovergestelde zien.

Het is pas regel vijf (het meten aan superposities) dat in de quantummechanica inderdaad iets heel vreemds en onbegrepen zit. Penrose zegt daarover zo iets als: ‘Quantummechanica kan enorm precies uitrekenen hoe metingen verlopen, maar quantum kan niet met zekerheid voorspellen wat de uitkomst van een individuele meting is. Quantummechanica is wellicht een verkeerde benadering (ontologie) van het probleem.’

Penrose 2011

Je kunt de uitkomst van een meting aan een superpositie niet voorspellen of althans je kunt: (a) de oplossingen wel aangeven, (b) de kans bij iedere oplossing, en zelfs (c) de gemiddelde waarde bij heel veel metingen; maar de uitkomst van één meting aan een superpositie kun je niet voorspellen. Meten aan een superpositie wordt ‘verklaart’ met het instorten van de golf functie. Vrijwel alle discussie over de betekenis en de interpretatie van de quantummechanica en of de quantummechanica eigenlijk wel ‘af’ is, vindt z’n oorsprong in regel vijf.

HANDIGE APPS

St. Andrews [Oneindige put](#) (html5).

St. Andrews [Twee dimensionale oneindige put](#).(html5)

5.4 OPGAVEN QUANTUMMECHANICA

41. 2π

a) Druk $E = hf$, $v = f\lambda$ en $p = h/\lambda$ uit in \hbar , k , ω .

42. + UV-catastrofe

In 1900 rekenen John William Strutt (Baron Rayleigh) en James Jeans aan de spectrum-curve van een zwarte-straler. Ze zijn gedeeltelijk succesvol met hun voorstel:

$$B(\lambda, T) = \frac{2ck_B T}{\lambda^4}. \quad (5.18)$$

Hierin is B de intensiteit van de straler die afhankelijk is van golflengte van het uitgezonden licht en T de temperatuur (in K); daarnaast herken je k_B als de constante van Boltzmann en c als de lichtsnelheid.

a) Plot de functie $y_{RJ}(x)$ waarbij $f = x$, (neem $x = \lambda$ en $k_B = c = 1$):

$$y_{RJ}(x) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 T}{x^4}. \quad (5.19)$$

Door verschillende T te nemen, kun je het effect zien van de temperatuur op de vorm van de curve.

Phet: [zwarte straler](#)

Vergelijk de curve van Rayleigh-Jeans met de *vorm* van Planck-kromme van een zwarte straler, bijvoorbeeld BINAS T22.

b) Bij welk golflengte tonen de curven gelijkenissen?

c) Bij welke golflengte gaat het mis?

Deze onmogelijkheid om de stralingscurve te kunnen verklaren, raakt berucht als de 'UV-catastrofe.'

d) Leg dit uit.

43. + **Wiens benadering**

In navolging van ideeën van Ludwig Boltzmann en James Maxwell probeert Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien in 1896 ook een oplossing te vinden voor stralings-curve van de zwarte straler. Wiens voorstel is:

Voor het gemak is hier
 $\exp(x) = e^x$.

$$B(\lambda, T) = \frac{2hf}{\lambda^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}. \quad (5.20)$$

a) Bekijk de term in de exponent: hc/λ . Wat valt je op?

b) Plot de functie van Wien (neem $x = \lambda$ en $k_B = h = c = 1$):

$$y_W(x) = \frac{2}{x^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{xT}\right)}, \quad (5.21)$$

en simuleer verschillende temperaturen.

c) Leg uit welke verbetering Wiens voorstel laat zien.

d) Is er nog steeds een UV-catastrofe?

44. + **Planck-curve**

Max Planck houdt niet van ad-hoc formuleringen: Een theorie moet opgebouwd vanuit axioma's. Planck puzzelt lang aan een verklaring voor het spectrum van de zwarte-straler. Met heel veel tegenzin lukt het hem om het spectrum van de zwarte straler te plotten als hij voorlopig aanneemt $E = hf$. Dat wil zeggen dat een bepaalde golflengte (zeg $\lambda = 650 \text{ nm}$) slechts één bepaalde energie-hoeveelheid kan hebben (in dit geval $E = hc/e\lambda = \dots \text{ eV}$). Als Planck die veronderstelling gebruikt, laat hij zien dat de curve van de zwarte-straler voldoet aan:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hf}{\lambda^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (5.22)$$

a) Plot Plancks-functie (neem $x = \lambda$, $k_B = h1$):

$$y_P(x) = \frac{2}{x^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{xT}\right) - 1}, \quad (5.23)$$

en simuleer verschillende temperaturen.

b) Vergelijk deze met het spectrum van de zwarte straler. Probleem opgelost?

c) Plot tot slot alle drie grafieken in dezelfde figuur: Rayleigh-Jeans, Wien en Planck.

45. Waterstof-spectrum

In 1885 ontdekten de Zwitser Johann Balmer en de Zweed Johannes Rydberg enige regelmaat in golflengtes van het spectrum van waterstof:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m = 2 \quad n = 3, 4, \dots \quad R = 10,973 \text{ m}^{-1}. \quad (5.24)$$

Er is in 1900 geen theorie voor dit verband, noch kan men verklaren waar de grootte van de constante R vandaan komt. Overigens verschijnen er rond 1900 hele handboeken met spectra van de elementen, maar niemand kan ze verklaren.

Als je in de Balmer-Rydberg-formule vergelijking (5.24) $m = 2$ invult en je gebruikt Rydbergs constante $R = 10973731.57 \text{ m}^{-1}$, dan kun je goed de waterstoflijnen uitrekenen.

a) Wat is het verschil tussen een absorptie-, emissie-, lijn- en een continu-spectrum?

b) Herken je golflengte die hoort bij de combinatie $m = 1, n = \infty$?

c) Zoek het lijnenspectrum op van waterstof.

d) Bereken met de Balmer-Rydberg-formule om welke waarden van n het gaat bij de waterstof-lijnen.

46. + Constante van Planck

Door het fotoelektrisch-effect te onderzoeken, kun je de constante van Planck bepalen. Ga naar/download [Colorado Phet: foto-electrisch effect](#). Het is de bedoeling dat je een grafiek gaat plotten waarin je laat zien hoe E en f van elkaar afhankelijk zijn. De frequentie van de lamp kun je boven instellen. Met de spanning van de batterij kun je elektronen van het oppervlak tegenhouden.

a) Een elektron wordt afgeremd in een elektrisch veld. Welke kant moet het veld gericht zijn?

b) Wat is het verband tussen de energie waarmee de elektronen de linker plaat verlaten en de spanning tussen de platen?

c) Voer nu een aantal metingen uit waarbij je telkens een frequentie of golflengte instelt en je de minimale spanning meet waarbij de elektronen *net* niet meer de overkant bereiken (m.a.w. waarbij $I = 0$).

d) Plot je meetpunten in een (E, f) -grafiek.

e) Hoe bepaal je Planck's constante uit de grafiek?

f) Bepaal de constante van Planck. Geef ook een schatting voor de nauwkeurigheid.

Vrij naar Polkinghorne 47. + **Plaats-, impuls-, en tijdoperator**

2002.

Het gaat vrij algemeen op dat je formules van de klassieke mechanica kunt omschrijven naar formules van de quantummechanica door de volgende substituties te maken voor de plaats, impuls en energie:

$$\hbar = h/2\pi \text{ en } \omega = 2\pi/T = 2\pi f.$$

$$x \rightarrow \hat{x} = x, \quad (5.25)$$

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.26)$$

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.27)$$

a) Toon aan dat de functie $\psi(t) = e^{-i\omega t}$ een eigenfunctie is van de energie-operator. Bepaal de eigenwaarden van de energie-operator. Kun je Planck's formule hieruit destilleren?

b) Toon aan dat de functie $\psi(x) = e^{2\pi i x/\lambda}$ een eigenfunctie is van de impuls-operator. Bepaal de eigenwaarden van de impuls-operator als die 'opereert' op de functie $\psi(x) = e^{2\pi i x/\lambda}$. Kun je de Broglie's formule hieruit destilleren?

De commutator is gedefinieerd als:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}. \quad (5.28)$$

c) Toon aan dat de twee operatoren \hat{p} en \hat{x} niet commutatief zijn.

d) Wat is de uitkomst van bovenstaande commutator?

48. + **Schrödinger-vergelijking**

a) Geef een functie voor de totale energie van een puntmassa.

b) Toon aan dat je de Schrödinger-vergelijking krijgt als je voor de totale energie de operator voor energie en de operator voor impuls invult (vergelijking 5.25):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \right).$$

De Schrödinger-vergelijking vertelt je hoe een quantum-toestand in de tijd evolueert (zich in de tijd ontwikkelt). Je laat dan beide kanten van de vergelijking los op de golffunctie $|\Psi\rangle$. Bijvoorbeeld de functie:

$$|\Psi\rangle = e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)}. \quad (5.29)$$

c) Toon aan dat deze functie inderdaad een oplossing is.

49. + **Evolutie quantumtoestand**

Als de operator \hat{H} niet afhangt van de tijd, geeft de linker vergelijking van 5.10 aan hoe je een $|\Psi\rangle$ kunt ontwikkelen in de tijd. Dat klinkt raar, maar realiseer dat \hat{H} een operator is en $|\Psi\rangle$ een functie: De operator heeft een vaste vorm in de tijd, maar de $|\Psi\rangle$ ontwikkelt zich in de tijd.

Omdat $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ mag je nu de quantumtoestand splitsen in een deel dat afhankelijk is van de tijd en een deel dat niet afhankelijk is van de tijd: $|\Psi\rangle = \phi(t) \cdot \psi(x)$.

a) Herschrijf de linker vergelijking tot een waarbij je aan beide kanten een $d\ldots$ hebt staan.

b) Breng de $|\phi\rangle$ naar links en integreer nu zowel de linker als de rechterkant, met andere woorden voer uit:

$$\int i\hbar \frac{1}{|\phi\rangle} d|\phi\rangle = \int E dt.$$

50. + Deeltje in een doos

In de Schrödinger-vergelijking (5.8) duidt je het rechterdeel als de Hamilton-operator: \hat{H} , wat je zou kunnen omschrijven als een functie die de totale energie oplevert. Voor een deeltje in een één dimensionale oneindig diepe doos luidt de Hamilton-operator in de doos (waarbij opnieuw geldt: $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + 0. \quad (5.30)$$

Omdat \hat{H} een functie is van één variabele, mag je kromme ∂ vervangen door rechte d .

Neem een eigenfunctie die past in de doos met breedte L :

$$|\psi_n(x)\rangle = A \sin(n\pi x/L). \quad (5.31)$$

Verder geldt voor de eigenfuncties van de energie-operator (dit is het rechterdeel van vergelijking 5.10):

$$\hat{H} |\psi_n(x)\rangle = E_n |\psi_n(x)\rangle, \quad (5.32)$$

waarbij E_n telkens de bijbehorende eigenwaarde is van iedere eigenfunctie van de operator \hat{H} .

a) Teken de golf functies $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$.

b) Teken ook het kwadraat van de golf functies.

c) Leg uit dat de golf functie – in deze doos – niet een vorm kan hebben als:

$$|\psi_n\rangle = A \cos(n\pi x/L).$$

d) Toon aan dat met de eigenwaardevergelijking voor de operator \hat{H} en vergelijking 5.30 volgt dat:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}. \quad (5.33)$$

Zie bijvoorbeeld BINAS: H12.4 Groenen e.a. 2014, domein F.

e) Leg in woorden uit wat uitdrukking vergelijking 5.32 doet.

f) Welke energiewaardes kan een deeltje aannemen?

St. Andrews: [Oneindige put](#)

51. Golf functie

In de twee voorgaande opgaven heb je gewerkt met de (bijzondere) situatie dat $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$. Een gevolg is dat je de quantumtoestand $|\Psi\rangle$

kunt splitsen in twee delen.

a) Voor het deeltje in een doos, voeg de beide delen $\psi(x)$ en $\phi(t)$ samen tot de complete (verzameling) van passende quantumtoestanden.

52. Eendimensionale energie-doozen

Maak een tabel waarin je beschrijft van I. een oneindig diepe doos en II. een Bohr-atoom (eindig diep doosje), de: (a) Energieniveau's, (b) de onderlinge afstanden van de niveau's, (c) de golffunctie.

53. tunneling

En ook dmv $\Delta E \Delta t$.

54. Dualiteit

Maak een 2x2 tabel van waarin je de vier situaties van dualiteit rangschikt.

55. Eigenwaarden

Leg uit waarom de eigenwaarden van meetbare grootheden niet complex mogen zijn.

56. Schrödingers kat

Zoals je al bij een dwarsfluit ziet, is superpositie niet beperkt tot quantum-systemen. Erwin Schrödinger stelde in 1935 een gedachte-experiment op met een superpositie van een kat.

a) Lees het artikel en geef de superpositie van de kat.

b) Leg uit waarom het belangrijk is dat de doos gesloten blijft.

c) Leg uit wat er zinnig en wat er onzinnig is aan dit gedachte-experiment.

wiki: [Schrödingers kat](#).

(Ma e.a. 2012 en Arndt e.a. 1999)

De Oostenrijkse Markus Arndt maakte een aantal jaar geleden een superpositie met buckyballs.

57. Halve Mach-Zehnder OF-gedrag = deeltje. Zie bijv Penrose2011.

58. Superpositie meting

Leg uit hoe postulaat drie volgt uit postulaat vier. (En wellicht geen postulaat is?)

59. + Quantum superpositie

Mijnheer Van Beekum heeft voor z'n robot honderdduizend eendimensionale, oneindig diepe doosjes gekocht (a 1,0101 cent/stuk) met daarin steeds een op dezelfde manier geprepareerd elektron in een superpositie van de toestanden $|E_2\rangle$, $|E_4\rangle$ en $|E_6\rangle$.

Van Beekum vraagt zich af hoe het elektron precies is geprepareerd. Daarvoor doet hij tien metingen waarvan de uitslagen zijn:

$$n(E_2) = 1, n(E_4) = 3, n(E_6) = 6.$$

Hij concludeert:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{10}|E_2\rangle + \frac{3}{10}|E_4\rangle + \frac{6}{10}|E_6\rangle. \quad (5.34)$$

a) Leg uit wat er fout is aan de opzet van deze meting.

b) Uitgaande van Van Beekums tien metingen, wat zou volgens jou de superpositie zijn?

Onder de indruk van je kennis, vraagt Van Beekum je om de gemiddelde energie van het elektron te berekenen.

c) Leg uit hoe je dat kunt doen.

d) Bereken de gemiddelde energie: $\langle E \rangle$.

Van Beekum is helemaal in z'n sas met jou als talent-leerling. Jij bent echter nog niet tevreden. Je besluit een betere steekproef te nemen en nog 290 doosje te meten:

$n(E_2) = 44$, $n(E_4) = 102$, $n(E_6) = 144$.

e) Leg uit of je de metingen van Van Beekum acceptabel vond.

6 TWEE TOESTANDEN

Rekenen aan quantumsystemen leidt in z'n algemeenheid al vrij snel tot grote hoeveelheid rekenwerk. Hoewel het deeltje in de een doos (opgave 50) redelijk eenvoudig lijkt, horen bijvoorbeeld de eigenwaarden die je uitrekent voor de energie niet bij de eigenfuncties die je uitrekent met plaats. Om toch een gevoel te krijgen van quantum is het handig eerst te rekenen aan systemen met slechts twee toestanden, dikwijls aangegeven als $|0\rangle$ en $|1\rangle$ of als $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ (wat in de ket staat is maar een etiket).

6.1 KLASSIEK: CBIT

Een klassieke computer rekent met een klassieke bit (cbit) dat 0 of 1 is. Hoewel niet zo gebruikelijk kun je de toestand van een cbit noteren in de dirac-notatie als een ket:

$$|cbit\rangle = |0\rangle \text{ of } |cbit\rangle = |1\rangle. \quad (6.1)$$

Technisch kun je een cbit op allerlei manieren maken: Een schakelaar die aan of uit staat, twee verschillende spanningen (0V en 5V) in een elektrisch circuit, twee verschillende lichtsterktes, de richting van een magnetisch veld enzovoort.

Cbit's kun je verwerken met klassieke operatoren de AND- en XOR-poort zijn. Met deze twee poorten als bouwstenen kun je alle computeroperaties uitvoeren. Bijvoorbeeld vermenigvuldigen is niets anders dan herhaald optellen of herhaald combineren van een AND-poort en een XOR-poort.

Bijvoorbeeld een wiki:
[half adder](#).

6.2 QUANTUM: QUBIT

Een quantum bit (qubit) is een quantum systeem met slechts twee (eigen-)toestanden die meestal zijn aangegeven als $|0\rangle$ en $|1\rangle$:

$$|qubit\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad \wedge \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (6.2)$$

Het quantum-achtige van een qubit bestaat eigenlijk uit twee zaken. Enerzijds kan een qubit in een superpositie zijn van beide toestanden, met andere woorden de qubit is 'tegelijk' $|0\rangle$ EN $|1\rangle$ (vergelijk dit met de klassieke cbit die in toestand $|0\rangle$ OF $|1\rangle$ is). Anderzijds bij meting aan de qubit, kun je uitsluitend de kans aangeven welke uitkomst meting aan

het $|qubit\rangle$ oplevert wederom: Meten is een toevallig proces volgens het vierde postulaat en levert:

$$P(|qubit\rangle = |0\rangle) = P(|0\rangle) = \alpha^2, \quad (6.3)$$

$$P(|qubit\rangle = |1\rangle) = P(|1\rangle) = \beta^2. \quad (6.4)$$

Wiskundig gezien zijn qubits genormaliseerde vectoren, dat wil zeggen :

$$\|qubit\| = \langle qubit|qubit\rangle = 1. \quad (6.5)$$

Hoe maak je een qubit? Aan de TU Delft gebruiken ze onder andere kristallen waarin ze elektronen opsluiten en waarvan ze de quantum-spin kunnen manipuleren in twee richtingen: $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$. Op het practicum van *Physics Rules!* staat een Mach-Zehnder-interferometer waarmee je fotonen in twee richtingen kunt manipuleren, zie ook opgave 62.

6.3 REKENEN AAN EEN SYSTEEM MET TWEE TOESTANDEN

Ga uit van een operator-quantum-systeem \hat{O} en $|\psi\rangle$ dat twee eigentoe-standen heeft en twee verschillende eigenwaarden (de uitkomsten van een meting) (postulaat één en twee):

$$\text{eigentoestand } |\uparrow\rangle \text{ met eigenwaarde } o = +1; \quad (6.6)$$

$$\text{eigentoestand } |\downarrow\rangle \text{ met eigenwaarde } o = -1. \quad (6.7)$$

Een willekeurige superpositie zou kunnen zijn (postulaat vier):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} |\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |\downarrow\rangle. \quad (6.8)$$

Het vierde postulaat vertelt ook wat een meting met de operator \hat{O} aan deze superpositie $|\psi\rangle$ oplevert. Je kunt de eigenwaardes meten ± 1 met een kans die gelijk is aan het kwadraat van de amplitude:

$$o = +1 \quad P = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{of} \quad o = -1 \quad P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}. \quad (6.9)$$

Je ziet hier dat bij de quantummechanica kans is 'ingebakken'. Voorafgaand aan de meting is de quantumtoestand een exact omschreven toestand, en door de meting vervalt het systeem naar een eigentoe-stand. Welke dat is, kun je alleen statistisch aangeven: 25% kans op $|\uparrow\rangle$ en 75% kans op $|\downarrow\rangle$. Hoewel de toestand van het quantumstelsel in een superpositie is, kun je wel heel precies de verwachtingswaarde aangeven. Volgens vergelijking 4.34:

$$\langle O \rangle = \sum P(o_i) \cdot o_i = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad (6.10)$$

Samengevat zie je hier de essentie van de quantummechanica. Quantum kan heel exact: (a) aangeven hoe een begintoestand $|\psi\rangle$ er uit ziet, (b) aangeven welke uitkomsten gemeten kunnen worden ($o = -1$ en $o = +1$); (c) aangeven hoe groot de kansen zijn dat die waarden gemeten gaan worden (25% en 75%), (d) aangeven wat de verwachtingswaarde is $\frac{1}{2}$, en zelfs (e) aangeven hoe de toestand evolueert in de tijd met Schrödingervergelijking. Maar de quantummechanica kan niet exact aangeven welke waarde bij een individueel experiment gemeten gaat worden.

Nog een opmerking over het laatste deel van het vierde postulaat: Na een meting bevindt het systeem zich in een eigentoestand, of door de meting is de golffunctie ingestort. Uit het voorbeeld:

- Als je meette $o = +1$, dan is nu de (eigen)toestand: $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$;
 - Als je meette $o = -1$ dan is nu de (eigen)toestand: $|\psi\rangle = |\downarrow\rangle$.
- Stel je meette $o = +1$ en je meet onmiddellijk weer, dan geldt nu het derde postulaat. De toestand na de meting is $|\psi\rangle = +1 \cdot |\uparrow\rangle$ en het derde postulaat geeft nu aan wat je meet:

$$\hat{O}|\psi\rangle = \hat{O}|\uparrow\rangle = +1 \cdot |\uparrow\rangle. \quad \text{Herhaal meting: } o = +1; +1; +1; +1; \dots \quad (6.11)$$

Gelukkig mag je denken, want dit is het kenmerk van een bonafide meting: Bij herhaling meet je steeds dezelfde uitkomst.

6.4 OPGAVEN SYSTEMEN MET TWEE TOESTANDEN

60. Tweetoestand superpositie

- Leg uit waarom bij de superpositie toestand 6.8 geldt: $a_1^2 + a_2^2 = 1$.
- Bereken de verwachtingswaarden van metingen met operator \hat{O} aan de toestand van 6.8.

61. Tweetoestand superpositie-2

Met de apps van Quvis kun je superposities maken en aan simpele eendimensionale putten meten. Achter ieder beginscherm zitten een aantal opdrachten.

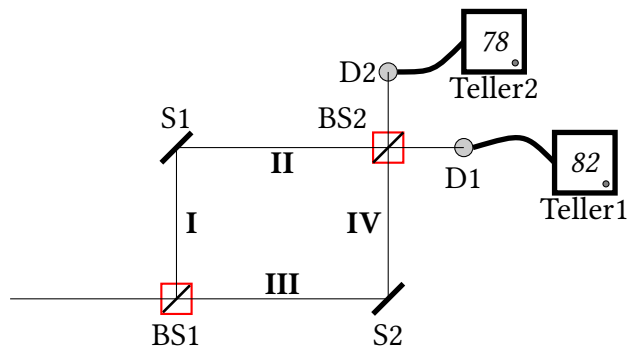
Maak deze opdrachten.

62. Mach-Zehnder interferometer; klassiek?

Een Mach-Zehnder interferometer is een toepassing van superpositie. Dat werkt als volgt zie figuur 6.1. Een lichtbron (links) stuurt een enkel gepolariseerd foton naar een half doorlatende spiegel (*Beamsplitter*) (BS1). Na de half doorlatende spiegel zijn er twee paden in de interferometer: Eén rechtdoor (III) en één omhoog (I). In beide paden zit een 100% spiegel (S1 en S2) die het pad verlegt naar wederom een beamsplitter (BS2) waar de paden weer samenkomen. Achter BS2 zitten twee detectoren D1 en D2 die beide zijn aangesloten op eigen tellers. *Laten we eerst uitgaan van het klassieke idee dat licht een golf is.* Een half-doorlatende spiegel doet precies dat: de helft van het licht

vrij naar Bowman 2008.

St Andrews: [Single Photon lab](#)



Figuur 6.1 – In een Mach-Zehnder interferometer zitten twee half-doorlatende spiegels (BS1 en BS2). Aan de linkerzijde komt licht / een foton de opstelling binnen. Aan de rechterkant staan de detectoren: Teller1 heeft 78 fotonen gemeten en Teller2 heeft 82 fotonen gemeten.

doorlaten en de andere helft spiegelen.

a) Leg uit dat paden I en III nu 50% van het licht bevatten.

Beide paden komen samen bij BS2.

b) Leg uit hoe het licht uit het onderste pad zich verdeelt over de detectoren.

c) Leg uit wat de detectoren meten als je beide paden in rekening brengt. Als je de proef uitvoert in het lab, meet je iets anders. Daarover gaat de volgende opgave.

63. Beamsplitter en superpositie

Een halfdoorlatende spiegel fungeert als een quantum Hadamard-operator.

Stel dat je in de Mach-Zehnder interferometer van figuur 6.1 BS2 verwijdert. Om de werking duidelijk te maken, maken we gebruik van Diracs Bra-ket-notatie. Neem aan dat de toestand van een foton uit de bron $|q_0\rangle = |0\rangle$ is.

a) Toon aan dat er na de BS1 een superpositie is.

Je doet nu meting aan deze superpositie bij D1 en D2.

b) Leg uit wat je verwacht voor de uitkomst van één meting?

Je voert nu heel vaak deze meting uit.

c) Wat verwacht je voor verdeling van de metingen over beide detectoren?

64. Mach-Zehnder interferometer, quantum!

In het lab gaat het experiment met de Mach-Zehnder interferometer iets anders. Ten eerste geeft een detector altijd hetzelfde signaal (een hoorbare ping of klik of een puls op een scherm,...) als er een foton op valt. Als de opstelling werkt, blijkt de grootte van het signaal (volume van een ping) altijd even groot te zijn. Er zijn geen kleinere of grotere signalen (harder of zachter geluid). Kennelijk zijn alle fotonen die op de detector vallen gelijk. Er zijn geen halve of anderhalve fotonen of iets dergelijks. Ten tweede blijkt dat in het bovenstaande voorbeeld

St Andrews: [half doorlatende spiegel](#).

St. Andrews: [Mach Zehnder](#)

figuur 6.1 D1 meet alle fotonen (100%) en D2 meet niets (0%). Dat is in strijd met de klassieke verklaring. Hoe zit het dan wel?

Zoals al vermeld, een beamsplitter fungeert als een quantum Hadamard-poort. Neem aan dat de toestand van een foton uit de bron $|q_0\rangle = |0\rangle$ is.

a) Toon aan dat er na de BS1 een superpositie is.

b) Bereken toestand na BS2.

c) Leg uit wat je meet als je de bron van onder (uit zuidelijke richting) op BS1 schijnt?

65. **Delayed choice experiment** EN-gedrag? = golf. Zie bijv Penrose2011.

66. **Poort, dirac-notatie**

De \hat{H} -operator kun je voor een twee-toestand systeem in Dirac-notatie opschrijven als:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right)$$

a) Toon aan dat geldt:

$$\hat{H} |0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (6.12)$$

67. **Quantum random walk**

Neem een gecombineerde toestand van twee kets: $|\text{spin}\rangle |x\rangle$ waarbij:

$$|\psi\rangle = |\text{spin}\rangle |x\rangle, \quad (6.13)$$

$$\text{spin} = \uparrow \text{ of spin} = \downarrow, \quad (6.14)$$

$$x = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

Mogelijke toestanden zijn dan $|\uparrow\rangle |3\rangle$ of $|\downarrow\rangle |-81\rangle$ enz. Beschouw daarnaast de twee operatoren:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right), \quad (6.16)$$

$$\hat{S} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |x+1\rangle \langle x| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |x-1\rangle \langle x|, \quad (6.17)$$

waarbij \otimes de eigenschap van vermenigvuldigen heeft.

a) Voer uit $\hat{H} |\uparrow\rangle |3\rangle$.

b) Voer uit $\hat{S} |\uparrow\rangle |-4\rangle$.

Wat je zojuist gedaan hebt is een spin-up deeltje verplaatst over de x-as van $x = -4$ naar $x = -3$.

c) Voer nu uit $\hat{S}\hat{H} |\uparrow\rangle |0\rangle$.

d) Beschrijf wat voor toestand dit is.

e) Voer een meting uit op deze nieuwe toestand. Waar verwacht je het deeltje met spin= \uparrow te vinden?

f) Leg uit wat er gebeurt als je deze operatie blijft uitvoeren:

$$\hat{S}\hat{H}\hat{S}\hat{H}\hat{S}\hat{H}\dots \otimes |\uparrow\rangle |0\rangle?$$

68. + Verstrengeling

Bohrs idee van instorten van de golffunctie kun je onderzoeken met een verstrengelde toestand. Dat gebeurt in grote lijnen als volgt: Eva verstrengelt (verknoopt, of mengt) twee qubits met elkaar volgens de toestand 7.16. Zonder de qubits te verstoren, stuurt Eva één qubit naar het linker uiteinde van het heelal (naar Alice) en verstuurt ze het andere qubit naar het rechter uiteinde van het heelal (naar Bob).

- a) Welke toestanden kan het qubit bij Alice hebben?
 - b) Welke toestanden kan het qubit bij Bob hebben?
 - c) Toon aan dat Alice 50% kans heeft op het meten van $|0\rangle$. (En dus 50% op $|1\rangle$)
 - d) Leg uit wat het vierde postulaat doet met de totale golffunctie (met andere woorden ook bij Bob).
- Bob weet niet wat zijn toestand is, het kan $|1\rangle$ of $|0\rangle$ zijn. Bob meet vrijwel direct na Alice. Stel Alice meet $|0\rangle$.
- e) Leg uit wat Bob nu meet. Hoe groot is de kans dat Bob deze waarde meet?
 - f) Leg uit wat er vreemd is aan deze situatie.
 - g) Leg uit waarom je verstrengeling niet kunt gebruiken om informatie instantaan – en dus sneller dan het licht – van Alice naar Bob te sturen.

7 QUANTUMCOMPUTER

EEN QUANTUMSYSTEEM met één qubit kan zich tegelijk in twee toestanden bevinden maar door meer qubits te gebruiken, is er al snel veel meer mogelijk:

- $|\text{twee qubit}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$.
- $|\text{drie qubit}\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|001\rangle + \gamma|010\rangle + \delta|011\rangle + \dots$
- enz.

Twee qubits kun je met elkaar verstrengelen of samenknopen. Verstrengeling is een bizar verschijnsel dat je uitsluitend in de quantummechanica tegenkomt en heeft te maken met een gekoppelde superpositie tussen twee qubits, zie opgave 78. Verstrengeling van twee qubits kun je wat primitief voorstellen al twee kledingstukken met verschillende kleuren (zeg wit en blauw) die je in de wasmachine stopt. Als je nu gaat wassen, vermengen de kleuren, maar blijven de kledingstukken ieder wel los bestaan; en daar houdt ook al gelijkenis op.

[Delftse verstrengeling](#)

IN 2018 zijn er een vijf manieren waarop je een qubit kunt maken.

7.1 QUANTUMCOMPUTER

Het idee van een quantumcomputer stamt uit ongeveer 1980. Verschillende natuurkundigen, onder wie Richard Feynman, stellen voor dat als je wilt rekenen aan quantummechanische systemen, bijvoorbeeld grote eiwitten, je dat moet doen met een quantum-achtig ding en niet met een klassiek ding zoals de huidige computer. De quantummechanica werkt met verschijnselen zoals superpositie en verstrengeling en de quantumcomputer zou daarvan gebruik moeten gaan maken.

Feynman [1982](#)

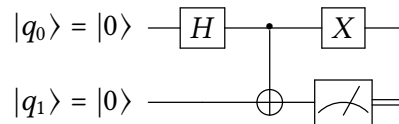
Een quantumcomputer verwerkt digitale informatie via qubits. Het computerbedrijf IBM bouwt er een en aan de universiteiten van Amsterdam, Delft en Leiden werken natuurkundigen aan de quantumcomputer; onder andere proberen deze laatste samen 's werelds eerste quantum-internet te bouwen.

IBM [Charles Bennet](#) over de quantum-informatie.
[quantum lab Delft](#)

Waar klassieke computers rekenen met het cbits in OF-toestanden (vergelijking 6.1 die na elkaar doorgerekend worden, rekent de quantumcomputer met qubits in EN-toestanden (vergelijking 6.2) gecombineerd die tegelijk doorgerekend worden. Dit laatste schept enorme mogelijkheden.

Om qubits te manipuleren, maakt de quantum-computer gebruik

van logische quantumpoorten die met superposities werken en die de bits kunnen verstrengelen. Als de quantumcomputer aan het werk is, mag er geen contact zijn met de omgeving, omdat anders regel vier geldt: het systeem neemt een eigentoestand aan en de superposities zijn verbroken. Afsluiten van de buitenwereld gebeurt door de computer enorm in te pakken en vervolgens af te koelen tot vlak boven het absolute nulpunt.



Figuur 7.1 – Een twee qubit-systeem. Helemaal links de begin-toestanden van beide qubits. Dan twee operatoren die samen een verstrengelaar vormen, op de bovenste qubit lijn een X-poort en de op de onderste qubit een meting. De meter heeft twee uitkomsten: 0 of 1, vandaar de twee uitgangen.

MANIPULATIE VAN qubits ziet er in z'n algemeenheid ongeveer zo uit:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle \rightarrow \text{operator} \rightarrow |\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle \rightarrow \text{operator} \dots \quad (7.1)$$

Figuur 7.1 geeft een mogelijk simpel systeem van twee qubits waarbij de tijdsevolutie verloopt van links naar.

Een blokje stelt een operator voor. Een blokje noemen we een poort, in dit geval is er een H-poort, een CNOT-poort een X-poort en een meting.

- Meestal is de begintoestand van ieder qubits nul zodat je de totale toestand kunt omschrijven als: $|00\rangle$.
- Een \hat{H} -operator werkt op de bovenste qubit. De onderste qubit wordt niet bewerkt.
- Een CNOT-operator koppelt de bovenste qubit aan de onderste.
- Op bovenste qubit werkt een \hat{X} -poort en tegelijk wordt de onderste qubit gemeten.

HANDIGE APPS

youtube: [Feynman on computer heuristics](#).

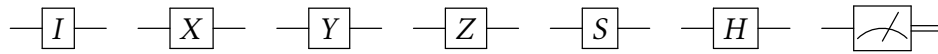
Je kunt zelf een account aanmaken op de IBM quantum computer:

<https://www.research.ibm.com/ibm-q/>

7.2 QUANTUMPOORTEN

Hieronder een lijstje van de meest voorkomende poorten. De meeste quantumcomputer operaties kun je met onderstaande poorten maken.

7.2.1 poorten op één qubit



Figuur 7.2 – Quantumpoorten op één bit; de laatste poort is een meting.

I-POORT idle- of identity-poort. Plat gezegd: deze poort verandert niets.

Wikipedia over [quantum poorten](#).

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle; |1\rangle \rightarrow |1\rangle,$$

of als bra-ket operator:

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|. \quad (7.2)$$

X-POORT of NOT-poort. Draait de qubit om:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle; |1\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (7.3)$$

$$\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \quad (7.4)$$

Y-POORT. Draait de qubit naar de complex geconjugeerde ($z \rightarrow z^*$):

$$|0\rangle \rightarrow i |1\rangle; |1\rangle \rightarrow -i |0\rangle, \quad (7.5)$$

$$\hat{Y} = -i |0\rangle\langle 1| + i |1\rangle\langle 0|. \quad (7.6)$$

Z-POORT. Roteert de qubit in de quantum-toestand-ruimte:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle; |1\rangle \rightarrow -|1\rangle, \quad (7.7)$$

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|. \quad (7.8)$$

S-POORT. Roteert de qubit in de quantum-toestand-ruimte over een willekeurige hoek ϕ (en soms is $\phi = \pi/4$):

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle; |1\rangle \rightarrow e^{i\phi} |1\rangle. \quad (7.9)$$

H-POORT of Hadamard-poort. Zet een qubit in superpositie met zichzelf:

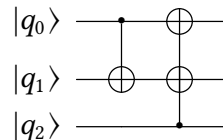
$$|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}; |1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (7.10)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1| \right) \quad (7.11)$$

M-POORT: meting. Meet een reële eigenwaarde van een qubit. De M-operator is de enige poort die niet reversibel is, of met andere woorden die je niet kunt 'terugspoelen' in de tijd. Zie postulaat vier: Als je aan een qubit meet, ben je de superpositie kwijt. Omdat de superpositie van een qubit twee toestanden bevat, kan een meting twee waarden geven; daarom heeft de M-poort twee uitgaande lijnen.

7.2.2 poort op meer qubits

CNOT-poort (Controlled-NOT of Conditional-NOT; symbool: \oplus). Bij



Figuur 7.3 – Voorbeeldcircuit van een CNOT-poorten. In de tweede stap stuurt de onderste qubit-lijn beide bovenste lijnen.

een CNOT leest de controle-qubit (het zwarte bolletje het signaal): als de controle-bit $|0\rangle$ is, dan blijft de andere qubit (de doel-qubit) ongemoeid; maar als de controle-qubit een $|1\rangle$ is, dan draait het doel-qubit om ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ of $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$), met andere woorden de CNOT maakt van $|00\rangle \rightarrow |00\rangle$ en $|10\rangle \rightarrow |11\rangle$ enzovoort. Bovenstaande eerste CNOT 'leest' één qubit-lijn en 'schrijft' op één qubit-lijn.

Een CNOT kan het schrijven echter net zo goed over meerdere lijnen doen, bijvoorbeeld over twee lijnen, de tweede CNOT in figuur 7.3:

$$CNOT = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + \quad (7.12)$$

$$|100\rangle\langle 111| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 100|. \quad (7.13)$$

HANDIGE APPS

- youtube: [Feynman on computer heuristics](#).
- Je kunt zelf een account aanmaken op de IBM quantum computer (een heuse 5 bits quantum-computer):
<https://www.research.ibm.com/ibm-q/>
- Er zijn heel veel quantum-software-simulators die je kunt downloaden, maar Google biedt een online simulatie:
<http://www.quantumplayground.net>

7.3 OPGAVEN QUANTUMCOMPUTER

69. Cbit

Zet het binaire getal 11010 om naar een decimaal getal.

70. Half-Adder

a) Zoek op hoe een *half-adder* twee binaire getallen optelt.

b) Bouw met bijvoorbeeld het programma *systematic* een half-adder en voer een simpele optelling uit.

Systematic

Overigens kan het ook met domino-stenen: <https://www.youtube.com/watch?v=1NuPy-r1GuQ&html5=1>.

71. **Cbit en qubit**

- a) Hoeveel cbits heb je nodig om één getal van drie cijfers weer te geven (bijvoorbeeld het getal 999).
- b) Hoeveel cbits heb je nodig om duizend getallen van drie cijfers weer te geven?
- c) Hoeveel qubits heb je nodig om één getal van drie cijfers weer te geven (bijvoorbeeld het getal 999).
- d) Hoeveel qubits heb je nodig om duizend getallen van drie cijfers weer te geven?

72. **Qubit, normalisatie**

- a) Toon aan dat voor een qubit genormaliseerd geldt: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
- b) Leg uit waarom $\alpha^2 + \beta^2$ wel 1 moet zijn.

73. **Encryptie**

- a) Zoek op internet: *factorisering in priemgetallen* en *encryptie*.
- b) Leg uit waarom er momenteel zo'n hectische zoektocht is naar de eerste werkende quantum-computer.

74. **Qubit meting**

Je voert een meting uit op de qubit:

$$|q\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle - \sqrt{\frac{5}{9}}\beta|1\rangle$$

Wat is de kans dat je toestand $|0\rangle$ meet en wat is de kans dat je toestand $|1\rangle$ meet?

75. **CNOT poort**

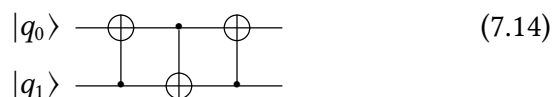
- a) Maak een waarheidstabel van een CNOT-poort.
- b) Kun je zelf bedenken hoe je een CNOT als een bra-ket operator schrijft?

76. + **Hadamard-poort**

Toon aan dat een H-poort reversibel is. Met andere woorden: Dat twee achter elkaar geplaatste H-poorten hetzelfde doen als een I-poort.

77. **Swap-circuit**

- a) Toon aan dat een swap-circuit 7.14 de qubits verwisselt.



- b) Maak het circuit in IBM en controleer je uitkomst.
- c) Leg uit dat je een qubit in superpositie niet kunt kopiëren.

78. + **Verstrengeling 2**


(7.15)

Dit is één van de vier Bell-toestanden.

Een verstrengelde toestand is een toestand van twee (of meer) qubits die in superpositie zijn. Een voorbeeld met twee qubits is:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle). \quad (7.16)$$

In figuur 7.15 vormen een H en CNOT samen een verstrengelaar.

a) Ga uit van twee qubits die beginnen in een $|00\rangle$ toestand en toon aan dat de verstrengelaar inderdaad toestand 7.16 oplevert.

b) Leg uit wat er gebeurt als je twee verstrengelaars (gespiegeld) achter elkaar plaatst?

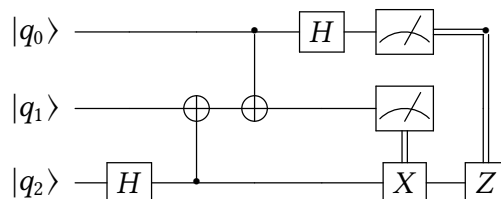
c) Bouw in IBM een verstrengelaar en controleer je uitkomsten.

79. Quantum teleportatie

Overgenomen uit college quantumfysica van Natk4all.

quantum teleportatie tussen de Canarische eilanden (Ma2012)

quantum teleportatie is een protocol waarbij een qubit wordt overgebracht van een Alice naar Bob en wel zodanig dat de qubit bij Alice verdwijnt en bij Bob tevoorschijn komt. Het idee is voor het eerst in 1993 bedacht en inmiddels uitgevoerd over een afstand van 143 km. In deze opgave zoeken we uit hoe dit werkt.


(7.17)

Het protocol is samengevat in het quantumcircuit 7.17. We noteren de toestand van het qubit op de bovenste lijn, dat bij Alice dat geteleporteerd gaat worden als: $|q_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

a) Laat zien dat het protocol eerst een verstrengelde toestand maakt op onderste twee lijnen: $|q_1\rangle$ en $|q_2\rangle$.

b) Geef de totale toestand (noem die $|\psi_1\rangle$) van het systeem na de tweede CNOT-poort.

c) Geef de totale toestand op voorafgaand aan de meting van $|q_0\rangle$ en $|q_1\rangle$.

Je meet q_0 .

d) Wat zijn de uitkomsten van (M_0 , M_1)?

Als $M_0 = +1$ dan werkt \hat{X} op de onderste lijn en als $M_1 = +1$ dan werkt \hat{Z} op de onderste lijn.

f) Bereken de toestand van $|q_2\rangle$ na \hat{X} en/of \hat{Z} .

g) Leg uit of je dit werkelijk teleportatie vindt.

A SOLVAY 1927



Figuur A.1 – Ingekleurde foto van de Solvay conferentie in Brussel 1927 op de trappen van het voormalig instituut van fysiologie. Links van het midden de enige vrouw: Marie Curie. Links van haar Max Planck (met hoed); rechts naast haar de pater-familias Hendrik Antoon Lorentz en daarnaast Albert Einstein.

De ontwikkeling van de quantummechanica is ook een geschiedenis van de hoofdrolspelers. Over hoe ze met elkaar samenwerkten, elkaar in de haren vlogen (Heisenberg en Schrödinger) en met elkaar in een periode van ongeveer 24 jaar een nieuwe theorie optuigden die het fundament vormt van alle huidige natuurkunde (klassiek en modern). Ter vergelijking: Het duurde vanaf Archimedes ongeveer 2000 jaar voordat Newton het fundament legde van de klassieke natuurkunde.

Op uitnodiging van de rijke Belgische industrieel Ernest Solvay kwamen vooraanstaande natuurkundigen in 1927 naar het vijfde Solvay-congres met als onderwerp ‘Elektronen en fotonen’. Hendrik Lorentz was voorzitter van het congres waarop Heisenberg zijn matrix-idee over de quantummechanica uitlegde en zijn idee gaf over hoe je de quantummechanica moest interpreteren (‘We hebben alleen maar uitkomsten van metingen.’) Vooral Albert Einstein en Niels Bohr vertegenwoordigden totaal verschillende ideeën daarover; Einstein wilde niet het idee van Heisenberg, Pauli en Bohr dat er geen werkelijkheid was zonder meting. Achttien van de deelnemers kregen een nobelprijs.

OP DE foto ([A.1](#)) *voorstte rij, van links naar rechts*: Irving Langmuir (46 jaar); Max Planck (69 jaar); Marie Curie (60); Hendrik Antoon Lorentz (74) (werkte in Leiden, Lorentz was een belangrijke reden waarom Einstein vaak naar Leiden kwam.), Albert Einstein (48) (tegen Bohr: ‘God dobbelt niet.’), Paul Langevin (55); Charles-Eugène Guye (61); Charles Wilson (58); Owen Richardson (48).

Middelste rij, van links naar rechts: Peter Debye (43 jaar); Martin Knudsen (56 jaar); William Lawrence Bragg (37); Hendrik Anthony Kramers (briljant assistent van Bohr) (33); Paul Dirac (25); Arthur Compton (35); Louis de Broglie (35); Max Born (45); Niels Bohr (42) (in antwoord op Einstein: ‘Vertel god niet wat hij moet doen’.)

[Meer over de foto.](#)

Bovenste rij, van links naar rechts: Auguste Piccard (43 jaar) (Professor Zonnebloem in Kuifje); Emile Henriot (38 jaar); Paul Ehrenfest (47) (werkte in Leiden, goede vriend van Albert Einstein); Edouard Herzen (50); Théophile de Donder (55); Erwin Schrödinger (40); Jules Verschaffelt (57); Wolfgang Pauli (27) (‘Das ist nicht nur nicht richtig, es ist nicht einmal falsch!’); Werner Heisenberg (26); Ralph Fowler (38); Léon Brillouin (38).

OUDE OPNAMES

Beelden van de [Solvay 1927 \(youtube, 5min\)](#) conferentie.

Interview met [Louis de Broglie \(youtube 30 min\)](#).

B ANTWOORDEN

Het is mijn favoriete lesmethode Scoop waarin, ik schat Hubert Biezeveld opmerkt: ‘Als je zelf een ander antwoord vindt, zijn er twee mogelijkheden: of dit antwoord is fout of jouw antwoord is fout.’

B.1 KLASSIEKE NATUURKUNDE

1. Impuls

a) en b) $dp/dt = 0$.

2. Telbare toestandruimte

a) Kop $\sigma = K$ of munt: $\sigma = M$.

b) $\sigma = 1$ en $\sigma = 2$ enz.

c) Een reeks punten: $n \times 262$ Hz.

d) 2^{256} .

3. Faseruimte

a) Punt op de x-as ($p(x) = 0$).

b) Horizontale lijn in de faseruimte $p(x) = c$, (x neemt toe). c) Wortelfunctie in de faseruimte: $p(x) = \sqrt{x}$.

4. Gassen; (pV)-diagram

A: Zie wikipedia Carnot-cyclus.

5. Update-regel

$a = \Delta v / \Delta t \rightarrow \Delta v = a \Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = a \Delta t \rightarrow v_2 = v_1 + a \Delta t$ waarbij je zelf de grootte van updategrootte Δt kunt kiezen.

6. Coach7 Evolutie

Vermoedelijk de startwaarden veranderen en dan $t = t - dt$ doen.

7. Evolutie; faseruimte

a) Denk aan de Coach7-regel: $x(t+1) = x(t) + v \cdot dt$ en $v(t+1) = v(t)$

b) x

c) $dv = F/mdt$ en $dx = v dt$.

8. Twee toestand systeem

a) Ja. Deterministisch naar toekomst en verleden, in de tijd-reeks ...KMCKMKMKM.... weet je altijd wat de vorige (terug in de tijd) of wat de volgende (vooruit in de tijd) met zijn.

b) KMKKMMKKKMMMKKKKMMMM, bijvoorbeeld. Als je in toestand M bent, weet je niet welke toestand je ervoor was (dat kan M of K zijn geweest, hangt er vanaf waar je was in de tijd, deze volgorde is niet reversibel) En zo zijn er nog veel meer voorbeelden.

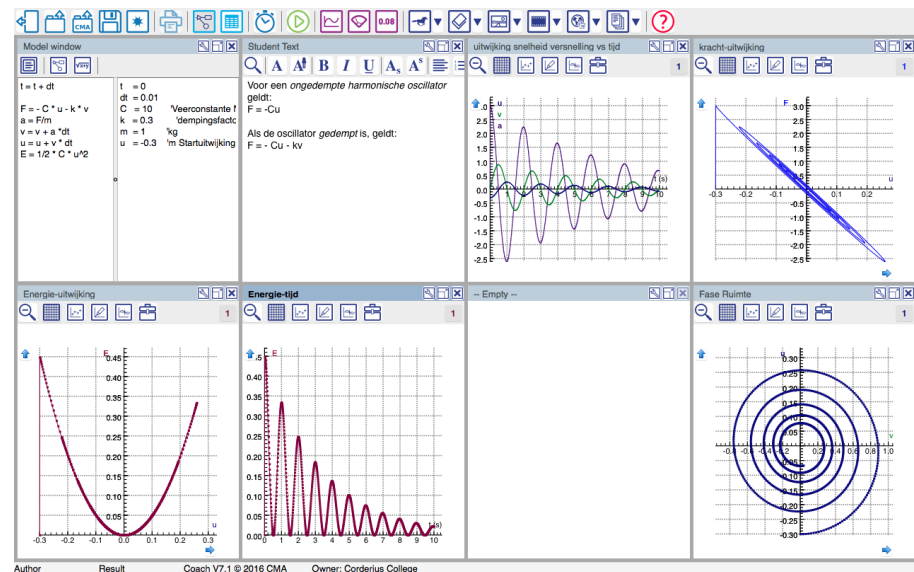
9. Zes toestanden systeem

a) Faseruimte: (1,2,3,4,5,6)

- b) Ja zeker! Je kunt vooruit en achteruit in de tijd.
 c) Vanuit toestand 2 weten we niet wat ervoor was.
 d) Evenheid
 e) Onevenheid? en nog veel meer waarbij je deelverzamelingen kunt maken die circulair in elkaar verlopen.

B.2 TRILLINGEN EN GOLVEN

10. + Harmonische oscillator 1: Toestand evolutie



Figuur B.1 – Gedempte harmonische oscillator in Coach7.

11. Harmonische oscillator 2

- a) Aan te uiteinden, daar is de snelheid het kleinst.
 b) en c) In St. Andrews app [Quvis: Classical Oscillator](#) kun je deze proef herhalen.

12. + Harmonische oscillator 3

- a)

$$m \frac{d^2}{dt^2} A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) = -m A \frac{4\pi^2}{T^2} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \rightarrow$$

$$-m A \frac{4\pi^2}{T^2} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) = -C A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \rightarrow$$

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} = C \rightarrow$$

$$\frac{m}{C} = \frac{T^2}{4\pi^2}.$$

- b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$ c) Dat is niet mogelijk; bij één paar (m, C) hoort één frequentie.

13. Toestandruimte

Onderwerp	Toestand-grootheden	Toestand-ruimte/diagram
muntstuk	bovenzijde	K,M
dobbelsteen	bovenzijde	1,2,3,4,5,6
beweging (van puntmassa's)	plaats, x impuls, p	faseruimte: (x,p)-ruimte
gassen	druk, p Volume, V	(pV)-diagram
staande golven	eigenfrequentie, f	'frequentieladder'

14. Staande en lopende golf

- a) Staand.
- b) Lopend.

15. + Golf-vergelijking

- a)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A \sin(kx + \omega t) = A \omega \frac{\partial}{\partial t} A \cos(kx + \omega t) = -A^2 \omega^2 \sin(kx + \omega t) = -A \omega^2 g(x, t)$$

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A \sin(kx + \omega t) = A k c^2 \frac{\partial}{\partial x} A \cos(kx + \omega t) = -A^2 k^2 c^2 \sin(kx + \omega t) = -A c^2 k^2 g(x, t),$$

dit geldt als: $\omega^2 = c^2 k^2 \rightarrow c = \pm \frac{\omega}{k}$.

- b) Wat vind je bij a) voor de waarde van c ?
- c) Idem voor $h(x, t) = A \exp^{(kx - \omega t)}$
- d)

$$c = \frac{du(x, t)}{dt} = \omega \cos(kx + \omega t)$$

Dus naar rechts.

- e) –
- f) Ja: iedere lineaire combinatie van functies die zelf oplossingen zijn van de golfvergelijking, zijn oplossingen van de golf-vergelijking.

16. Staande golf

- a) $f_{BT30} = (2n + 1) \cdot f_{GT} = 61 \cdot 3.5 = 2,110^2 Hz$.
- b) $30 + 1 = 31$?

17. Staande golf 2

- a) –
- b) –
- c) wiki geeft wel het antwoord.

18. Superpositie

19. Superpositie 2

a_n staat in feite voor hoe luid (amplitude) de betreffende toon aanwezig is.

20. **Fourier som**

c) Oneindig veel frequenties optellen.

21. **Fourier som 2**

b) Het aantal halve golflengtes dat past in een richting. Bijv (2,1) in de horizontale richting duidt op $2 \cdot \lambda/2$ in de x -richting en $1 \cdot \lambda/2$ in de y -richting.

Zie Feynman

B.3 WISKUNDE

22. **Complex getal**

a) $3 + i$; $1 + 5i$; $8 - i$

23. **Complex assenstelsel**

wellicht.

24. **Eigenwaarde-vergelijking**

a) Tweemaal differentieëren naar t .

b) Beide: 9.

c) $\hat{K}h = \hat{K}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \hat{K}f + c_2 \hat{K}g = c_1 9f + c_2 9g = 9(c_1 f + c_2 g) = 9h$
En neem $c_1 = 0,56$ en $c_2 = 0,83$.

25. **Eigenfunctie**

a) Inderdaad: Het oplossen van een differentiaal-vergelijking is voor een deel gewoon 'slim gokken'. Bijv: e^{ax} ; $\sin(bx)$; $\cos(cx)$.

b) Bijvoorbeeld: a^2 ; $-b^2$; $-c^2$.

c)

d) Nee, eigenfuncties zijn orthogonaal (inproduct = nul) en kunnen dus nooit de som zijn van andere eigenfuncties.

26. **Rotatie: Niet commutatief?**

kwestie van doen en (a) goed assen en draairichtingen definiëren.

27. **Vector definitie**

a) i) getal + getal = getal en getal x getal = getal.

b) Zie a: je kunt ze i) optellen en ii) vermenigvuldigen, en beide operaties leveren bestaande frequenties op.

c) i en ii in één: $af(x) + bg(x) = h(x)$

28. **Inproduct**

a) inproduct = 0.

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

d) Het gaat om een rotatie van $\pi/4$.

29. + **Loodrechte eigentoestanden**

b) A: Gebruik: $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$.

$$\begin{aligned} y_1 \cdot y_2 &= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x) \sin(2x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x) 2 \cos(x) \sin(x) dx \\ &= -2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(x) d \sin(x) = -2/3 \sin^3(x) \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 \end{aligned}$$

c) y_1 en y_2 hebben een inproduct van nul, maw: de twee functies zijn orthogonaal; je kunt de boventonen niet uit elkaar opbouwen.

30. Twee cbits

- a) $|00\rangle; |01\rangle; |10\rangle; |11\rangle$.
- b) 2^4 bijv: $|0000\rangle; |0001\rangle$.
- c) $|7\rangle$. binair naar decimaal omzetting.

31. Loodrechte spin?

- a) π radialen.
- b) -1
- c) $\pi/2$. En toch tekenen we de beide 'tegengestelde' quantumspins als $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$. Quantum-loodrecht is dus eigenlijk iets anders dan klassiek loodrecht. Hoewel dat vaak wel zo wordt voorgesteld, heeft quantumspin niets te maken met een draaiend tolletje.

32. Evolutie operator

- a)

$$\begin{aligned}\hat{X} |+\rangle &= \{|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\} |+\rangle, \\ &= |+\rangle\langle -| |+\rangle + |-\rangle\langle +| |+\rangle, \\ &= |+\rangle\langle -| +\rangle + |-\rangle\langle +| +\rangle, \\ &= |+\rangle \times 0 + |-\rangle \times 1 = |-\rangle.\end{aligned}$$

33. Toestand evolutie

- a)

$$\begin{aligned}\hat{T} |0\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \cdot |0\rangle, \\ &= |0\rangle\langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 0|0\rangle, \\ &= |0\rangle \cdot 0 + |1\rangle \cdot 1 = |1\rangle. \\ \hat{T} |1\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \cdot |1\rangle, \\ &= |0\rangle\langle 1|1\rangle + |1\rangle\langle 0|1\rangle, \\ &= |0\rangle \cdot 1 + |1\rangle \cdot 0 = |0\rangle.\end{aligned}$$

34. Toestand evolutie 2

- a) Zie de vorige opgave voor gebruik van \hat{T} . Dat levert op:

$$\begin{aligned}\hat{T} |4\rangle &= (|2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 6| + |6\rangle\langle 2|) |4\rangle, \\ &= |2\rangle\langle 4|4\rangle + |4\rangle\langle 6|4\rangle + |6\rangle\langle 2|4\rangle \\ &= 1|2\rangle + 0|4\rangle + 0|6\rangle = |2\rangle\end{aligned}$$

426426426 ...

- b) Evenheid: $d(\text{evenheid})/dt = 0$.

35. Gemiddelde

- a) $\langle x \rangle = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5$
- b) Het gemiddelde kun je niet meten in één individuele meting.

36. Kansverdeling

- b)

$$\langle x \rangle = \sum_{n=1}^{10} x_n \cdot P(x_n) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 \dots =$$

c) $n = \infty$

d) Vorm blijft gelijk, maar schuift steeds dichterbij elkaar.

37. **Random walk**

38. **Gauss' functie**

a) $-x^2$ blijft altijd een negatief getal en $e^0 = 1$ is de maximum waarde dus blijft de functie altijd onder 1.

c) $\langle X \rangle = 4$.

d) Wel: De verwachtingswaarde zou je kunnen meten.

39. **Toevalgenerator**

b) Nee, waarschijnlijk.

c) Ja waarschijnlijk.

40. + **Verwachtingswaarde**

a) Aantallen die je verwacht: $75 \cdot 1/15 = 5$; $75 \cdot 5/15 = 25$ en $75 \cdot (+3i \cdot -3i)/15 = 45$. Dat lijkt redelijk overeen te stemmen met de geprepareerde toestand.

b)

$$\langle r_{\text{verw}} \rangle = k \left(\frac{1}{15} \frac{1}{1} \cdot -1 + \frac{5}{15} \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{9}{15} \frac{1}{9} \cdot -1 \right) = \frac{-3}{60} \cdot k = -0,05 k$$

c)

$$\langle r_{\text{gemeten}} \rangle = k \left(\frac{6}{75} \frac{1}{1} \cdot -1 + \frac{22}{75} \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{47}{75} \frac{1}{9} \cdot -1 \right) = -\frac{5,72}{75} \cdot k = -0,076 k.$$

B.4 QUANTUMMECHANICA

41. 2π

a) $E = \hbar\omega$, $v = \omega/k$ $p = \hbar k$.

42. + **UV-catastrofe**

b) Bij lange golflengten (IR en VIR).

c) Bij korte golflengten.

d) Korte golflengten = UV. Hier schiet de curve van Rayleigh-Jeans naar oneindig.

43. + **Wiens benadering**

a) Dat is Plancks $E = hf = hc/\lambda$.

b) –

c) Nu is er wel klok-kromme: voor kleine λ toont de kromme een stijging en voor grote λ gaat de kromme weer naar nul.

d) Nee.

44. + **Planck-curve**

a)

b) Ja. Behalve dan dat Planck er nu mee zat dat hij niet kon uitleggen waar $E = hf$ vandaan kwam, deze aanname was net zo goed ad-hoc.

Planck hoopte dat als het probleem van de zwarte-straler beter begrepen zou gaan worden.

45. **Waterstof-Spectrum**

- a) Continu = zwarte straler; emissie = lijn = ijl en heet gas; absorptie = hete zwarte straler dat continu spectrum uitzendt, maar koeler ijl gassen tussen zwarte straler en waarnemer. Koeler ijl gas neemt energie van zwarte straler op en zendt die alle richtingen weer uit. Derhalve voor waarnemer nu donkere banden (omgekeerde van het lijnen-spectrum).
- b) De golflengte die behoort bij ionisatie van waterstof.
- c) –
- d) Zie de [Balmer-series](#).

46. + **Constante van Planck**

- a) Veld moet naar links gericht.
- b) A: $E_k = -qU$.
- c)
- d) Zo iets: [Millikan Nobel prijs college](#)
- e) h = helling in de grafiek
- f) Let op eV en Joule.

47. + **Plaats-, impuls-, en tijdoperator**

- a) $E = hf$
- b) $p = h\lambda$
- d) A: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. (Lijkt dit niet verdacht veel op Heisenbergs onbepaaldheid?)

48. + **Schrödinger-vergelijking**

- a) De totale energie van een deeltje is meestal de som van de kinetische en de potentiële energie:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} + E_{\text{pot}}. \quad (\text{B.1})$$

- c) Dat is weer een kwestie van precies differentiëren en gebruik maken van de Broglie $p = h/\lambda$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle &= \frac{i\hbar iH}{\hbar} e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} = H |\psi\rangle, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\psi\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (2i\pi/\lambda) e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} \\ &= -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 \cdot 2m} (4i^2 \pi^2/\lambda^2) e^{i(2\pi x/\lambda - Ht/\hbar)} \\ &= -1 \cdot i^2 \frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} |\psi\rangle = \frac{p^2}{2m} |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Wat hier staat is: $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$. Kennelijk zijn E de eigenwaarden van \hat{H} ; en als je kunt uitschrijven $E_k = p^2/2m$ met andere woorden: een vorm van kinetische energie.

49. + **Evolutie quantumtoestand**

- a) $i\hbar \frac{d}{dt} |\phi\rangle = E |\phi\rangle$

b)

$$\int i\hbar \frac{1}{|\phi\rangle} d|\phi\rangle = \int E dt \rightarrow i\hbar C \ln(|\phi\rangle) = Et \rightarrow$$

$$|\phi\rangle = e^C \exp\left\{\frac{Et}{i\hbar}\right\}.$$

50. + Deeltje in een doos

d)

$$\frac{d}{dx} \psi_n(x) = A \frac{\pi n}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) = -A \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2} \psi_n(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \times -\frac{\pi^2 n^2}{L^2} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} = E_n \rightarrow E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}.$$

e) Meting van \hat{H} aan de toestand $|\psi_n(x)\rangle$ levert de eigenwaarden van de operator: In dit geval de waarden die \hat{H} kan aannemen.

f) $E = \alpha E_1 + \beta E_2 + \dots$

51. Golf functie

$\exp(x) \equiv e^x$

a)

$$|\Psi(x,t)\rangle = \phi(t) \psi(x) = e^C \exp\left(\frac{E_n t}{i\hbar}\right) A \sin(n\pi x/L) \quad \wedge \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}$$

52. Eendimensionale energie-doozen

model	niveau's	afstanden niveau's	golf functie
∞ -doos	$E_n = n^2 \hbar^2 / 8mL^2$	groter: $\propto n^2$	nul op de wand,
Bohr-H	$E_n = -13.6/n^2$ eV	kleiner: $\propto 1/n^2$	in de wand.

53. tunneling

En ook d.m.v. $\Delta E \Delta t$.

54. Dualiteit

55. Eigenwaarde

Uitkomsten van metingen moet reëel zijn; complexe getallen kun je niet meten (Alleen maar abstract mee rekenen).

56. Schrödingers kat

a) $|\text{kat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{dood}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{leven}\rangle$

b) Zodra er interactie is met de omgeving, vindt een meting plaats. Dan vervalt de kat in één van beide toestanden.

c)

	deeltje-gedrag	golf-gedrag
massa	klassiek $E = \frac{1}{2}mv^2$ $p = mv$	quantum $\lambda = h/p$
straling	quantum $E = hf$ $p = E/c$	klassiek $\lambda = c/f$

Tabel B.1 – Massa en ook straling gedragen zich soms als deeltje; soms als golf: Dualiteit.

57. Superpositie meting

Als de toestand een eigentoestand $|\psi_1\rangle$ is, is er geen superpositie. Met andere woorden: $a_i = 1$. Meting van de operator levert nu o_i met een kans van 1^2 . Met andere woorden: Je meet in honderd procent van de metingen aan dit de waarde $O = o_i$.

58. Quantum superpositie

- a) Veel te weinig metingen om te kunnen concluderen. De sample-size zou groter moet zijn. (Hoe groot dat vertelt de statistiek je.)
b) kans = a_i^2 , dus:

$$|\psi\rangle = 0,316 |E_2\rangle + 0,548 |E_4\rangle + 0,775 |E_6\rangle.$$

- c) Er geldt: $E_n = n^2 h^2 / 8mL^2$. Het gemiddelde is de som van de energie van iedere toestand vermenigvuldigd met de kans.

d)

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= a_2^2 E_2 + a_4^2 E_4 + a_6^2 E_6 \\ &= \frac{h^2}{8m_e L^2} \left(\frac{1}{10} 2^2 + \frac{3}{10} 4^2 + \frac{6}{10} 6^2 \right) \\ &= 3,350 \frac{h^2}{m_e L^2}\end{aligned}$$

- e) Jij meet: $44/290 = 0,152$; $102/290 = 0,352$; $144/299 = 0,497$. bijna 50% fout bij Van Beekum. Conclusie: Hij snapt het nog niet.

B.5 SYSTEMEN MET TWEE TOESTANDEN

59. Tweetoestand superpositie

- a) A: $P(O = +1) + P(O = -1) = 1$.
b) $\langle O \rangle = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = -\frac{1}{2}$

60. Tweetoestand superpositie 2

Met de apps van Quvis kun je superposities maken en aan simpele

eendimensionale putten meten. Achter ieder beginscherm zitten een aantal opdrachten.

Maak deze opdrachten.

61. Halve Mach-Zehnder? Zie Penrose2011. Verschil tussen wanneer een foton zich gedraagt als een deeltje en wanneer als een golf.

62. **Mach-Zehnder interferometer; klassiek?**

a) De helft is 50%...

b) BS2 zal weer de helft splitsen. Van de oorspronkelijk golf uit de bron komt nu $0,5 \times 0,5 = 0,25$ in de rechter detector en om dezelfde reden ook 0,25 in de bovenste detector.

c) Voor beide paden geldt dezelfde redenatie. Zodoende krijgt de D1 $0,25 + 0,25 = 0,5$ van de oorspronkelijke bundel en krijgt ook D2 $0,25 + 0,25 = 0,5$ van de bundel. Met andere woorden beide detectoren ontvangen 50%.

63. **Beamsplitter en superpositie**

a) $|q_1\rangle = \hat{H}|q_0\rangle = \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Dit is een superpositie van $|0\rangle$ en $|1\rangle$.

b) Zodra je meet, 'stort de golffunctie in'. Dus één van beide detectoren geeft een signaal: Of D1 telt het foton, of D2 telt het foton. Welke weet je niet.

c) In 50% van de gevallen meet D1 een signaal, in 50% van de gevallen meet D2 een signaal.

64. **Mach-Zehnder interferometer quantum**

a) $|q_1\rangle = \hat{H}|q_0\rangle = \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Dit is een superpositie van $|0\rangle$ en $|1\rangle$.

b) Dat kan op twee manieren: Of je doet $|q_2\rangle = \hat{H}|q_1\rangle$ of je bedenkt (zie opgave 76) $\hat{H}\hat{H} = I$. Hier de tweede manier:

$$|q_2\rangle = \hat{H}\hat{H}|q_0\rangle = I|0\rangle = |0\rangle, \quad (\text{B.2})$$

met andere woorden de D1 ontvangt 100%.

c) $|q_2\rangle = \hat{H}\hat{H}|q_0\rangle = I|1\rangle = |1\rangle$. Nu meet D2 100%.

65. **Poort, dirac-notatie**

a)

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1| \right) |0\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \cdot 1 + |1\rangle \cdot 1 \right) + 0 + 0, \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b)

$$CN|01\rangle = \left(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| \right) |01\rangle, \quad (\text{B.3})$$

$$= 0 + |01\rangle + 0 + 0 = |01\rangle \quad (\text{B.4})$$

66. Quantum random walk

$$\text{a) } \hat{H} |\uparrow\rangle |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\downarrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right) \otimes |\uparrow\rangle |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle |3\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle |-3\rangle.$$

$$\text{b) } \hat{S} |\uparrow\rangle |-4\rangle = \left(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |x+1\rangle \langle x| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \right) \otimes |\uparrow\rangle |-4\rangle = |\uparrow\rangle |3\rangle.$$

$$\text{c) } \hat{S}\hat{H} |\uparrow\rangle |0\rangle = \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle |0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle |-1\rangle.$$

d) Een superpositie.

$$\text{e) } P(x = -1) = 1/2 \text{ en } P(x = 1) = 1/2.$$

f) Het deeltje neemt een steeds meer gespreide superpositie aan op de x-as.

67. + Verstrengeling

a) ga uit van: t_0 is de aanvangstoestand; t_1 de toestand na de H-poort; t_2 de toestand na de CNOT-poort.

$$t_0 : |\psi\rangle = |00\rangle,$$

$$t_1 : |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle,$$

$$t_2 : |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle.$$

of:

$$t_0 : |\psi\rangle = |00\rangle,$$

$$\begin{aligned} t_1 : |\psi\rangle &= H|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| - |1\rangle \langle 1| \right) |00\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |10\rangle \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 : |\psi\rangle &= CNOT \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |10\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 10| \right) \left(|00\rangle + |10\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |10\rangle \right). \end{aligned}$$

b) Alle poorten, behalve de meetpoorten, zijn reversibel:

$$\hat{H} CNOT CNOT \hat{H} = \hat{H} 1 \hat{H} = I$$

c) -

68. + Verstrengeling 2

a) $|00\rangle$ of $|11\rangle$.

b) $|00\rangle$ of $|11\rangle$.

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,5$

d) Instorten van de golffunctie.

e) $|11\rangle$, 100%.

f) Aanvankelijk was Bob's situatie onbepaald: 50-50 op het meten van 00 of 11. Echter door Alice' meting (heel ver weg in het heelal) is de situatie nu vastgelegd. Zodra Alice een meting uitvoert, stort de golffunctie in en bepaalt zij ook voor Bob wat hij gaat meten. Maar door de enorme afstanden is het onmogelijk dat de twee qubits met elkaar communiceren.

g) Alice kan niet beslissen wat ze gaat meten. Voor Alice is het een toeval welke toestand zij meet. Met andere woorden: Zij kan niet van te voren bedenken hoe haar te versturen informatie er gaat uit zien. (Als ze het getal 5=101 wil versturen, dan moeten ze van te voren vastleggen hoe de bits eruit zien. Superpositie is dus verbroken en daarmee is verstrengeling ook verbroken.)

Kennelijk zijn de twee verstrengelde qubits, ook al bevinden ze zich aan de uitersten van het heelal, blijvend aan elkaar gekoppeld totdat er wordt gemeten. Dit experiment wordt op kleine schaal uitgevoerd. Eerst in 1983 door de fransman Alain Aspect, maar recenter door onder andere een groep van Nederlandse onderzoekers in Delft.

Delftse [Bell test](#).

B.6 QUANTUMCOMPUTER

69. Cbit

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26$$

70. Half-Adder

71. Cbit en qubit

a) Met 10 bits kun je tot $2^{10} = 1024$ tellen.

b) $1000 \times 10 = 10.000$ cbits.

c) Weer 10 qubits.

d) 10 qubits. Alle superposities zijn tegelijk mogelijk.

72. Qubit, normalisatie

a)

b) Kans op een uitkomst moet 1 zijn.

73. Encryptie

74. Qubit meting

4/9 en 5/9.

75. CNOT poort

a) zie wikipedia: [CNOT](#).

b) $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11|$

76. Hadamard-poort

$$\begin{aligned}
\hat{H}\hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \cdot \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|), \\
&= \frac{1}{2} (2|0\rangle\langle 0| + 2|1\rangle\langle 1|), \\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \\
&= I.
\end{aligned}$$

Overigens geldt voor alle quantum-poorten \hat{O} (op de meting na):

$$\hat{O}\hat{O} = I. \quad (\text{B.5})$$

77. Swap-circuit

- a) –
- b) –
- c) –

78. + quantumteleportatie

- a) Zie de opgave over verstrengeling.
- b)

$$\begin{aligned}
|q_0\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \wedge \quad |q_1q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \\
|\psi_1\rangle &= |q_0\rangle \otimes |\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \right) \\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
t_0 \quad |\psi_0\rangle &= |000\rangle, \\
t_1 \quad |\psi_1\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle, \\
t_2 \quad |\psi_2\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|101\rangle, \\
t_3 \quad |\psi_3\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |00\rangle + \\
&\quad \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |11\rangle + \\
&\quad \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |10\rangle + \\
&\quad \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) |01\rangle + \\
&= \frac{\alpha}{2} (|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle) + \\
&\quad \frac{\beta}{2} (|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle).
\end{aligned}$$

d) (0,0); (0,1); (1,0); (1,1)

$$\begin{aligned}
P(0,0) &= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}; \\
P(0,1) &= P(1,0) = P(1,1) = \text{idem}.
\end{aligned}$$

Met andere woorden: omdat alle toestanden gelijke kansen hebben, is niet meer terug te rekenen wat de toestand van q_0 was voorafgaand aan de meting (=WFC). Het oorspronkelijke qubit $|q_0\rangle$ bestaat niet meer! Als $M_1 = +1$ dan werkt \hat{X} (7.3) op de onderste lijn en als $M_2 = +1$ dan werkt \hat{Z} (7.7) op de onderste lijn.

f) Mogelijke combinaties:

$(M_0, M_1) : (-1, -1); (-1, +1); (+1, -1); (+1, +1)$. Alleen q_2 is nog over,

immers WFC van q_0 en q_1 .

$$\begin{aligned}
 t_3 \quad |\psi_3\rangle &= \frac{\alpha}{2} (|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle) + \\
 &\quad \frac{\beta}{2} (|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle), \\
 t_4 \quad M_{0,1} = (-1, -1) \quad |\psi_4\rangle &= \frac{\alpha}{2} |0\rangle + \frac{\beta}{2} |1\rangle, \quad \text{term 1 en 7,} \\
 M_{0,1} = (-1, +1) \quad |\psi_4\rangle &= \frac{\alpha}{2} |0\rangle + \frac{\beta}{2} |1\rangle, \quad \text{term 3, 5, en } \hat{X}|q_2\rangle, \\
 M_{0,1} = (+1, -1) \quad |\psi_4\rangle &= \frac{\alpha}{2} |0\rangle + \frac{\beta}{2} |1\rangle, \quad \text{term 2, 8, en } \hat{Z}|q_2\rangle, \\
 M_{0,1} = (+1, +1) \quad |\psi_4\rangle &= \frac{\alpha}{2} |0\rangle + \frac{\beta}{2} |1\rangle, \quad \text{term 4, 6, en } \hat{Z}\hat{X}|q_2\rangle.
 \end{aligned}$$

En lijkt – op de factor 1/2 na dan, precies op q_0 van Alice.

g) Er wordt alleen maar informatie overgebracht; niet atomen zelf.

LITERATUUR

Verder studeren? Dan is Polkinghorne 2002 een aardige start, John Polkinghorne was een student van Paul Dirac.

Daarna zou je kunnen starten in Bowman 2008 die de structuur van de quantummechanica uitlegt op een wiskundige maar relatief korte manier (in ongeveer 200 pagina's).

Arndt, M. e.a. (1999). „Wave-particle duality of C60 molecules”. In: *Nature* 401, p. 680–682. DOI: [10.1038/44348](https://doi.org/10.1038/44348).

Benson, D. (2008). *Music: A Mathematical Offering*. web. URL: <http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/maths-music.html>.

Bowman, G. E. (2008). *Essential Quantum Mechanics*. Oxford: University press.

Feynman, R. P. (1982). „Simulating Physics with Computers”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 21.6/7, p. 467. URL: <https://www.cs.berkeley.edu/~christos/classics/Feynman.pdf>.

Gribbin, J. (1984). *In Search of Schrodingers cat Quantum Physics and reality*. New York: Bantam Book.

Groenen, E. e.a. (2014). *Natuurkunde VWO, Syllabus centraal examen 2016 (bij het nieuwe examenprogramma) Nader vastgesteld*. Utrecht: College voor examens vwo, havo, vmbo. URL: https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2016-natuurkunde-vwo/2016/f=/natuurkunde_vwo_2016_def_voor_hervaststelling_versie_2.pdf.

Ma, X. e.a. (2012). „Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward”. In: *Nature* 489.7415, p. 269–273. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/nature11472](https://doi.org/10.1038/nature11472). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature11472>.

Penrose, R. (2011). „Uncertainty in quantum mechanics: faith or fantasy?” In: *Phil. Trans. R. Soc. A* 369, p. 4864–4890.

Polkinghorne, J. (2002). *Quantum theory, a very short introduction*. Oxford: Oxford University press.

Van Wezel, J. (2013). „Quantum Mechanics 301”. Lecture Notes.

Wheeler, J. A. en M. Tegmark (2001). „100 Years of the Quantum”. In: *arxiv.org* Am.284:68-75,2001; URL: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101077.pdf>.

ALFABETISCHE INDEX

Symbols

\hbar

h, 27

ω , 27

beam splitter, 45

A

Alembert

Jean-Baptiste d', 12

amplitude, 11

atoom, 28

Bohr, 28

kern, 28

B

Balmer, J., 37

Bell, J., 54

Bell-toestand

zie verstrengeling 54

bit, 53

Bohr

model, 28

Bohr, N., 28

Born, M., 28

bra ket, 19

bra, 19

inproduct, 19

ket, 10, 19

operator, 20

buckyball, 31

C

cbit, 4, 6, 23, 43, 52

Coach7, 3, 11

commutatief, 22

commutator, 38

complex

assenstelsel, 21

geconjungeerd, 21, 51

getal, 15, 21

i, 15

Im, 15

Re, 15

computer

quantum

swap, 53

teleportatie, 54

Curie, M., 55

D

deBroglie, L., 28

deeltje

in doos, 29, 31, 39, 40

determinisme, 5, 7

reversibel, 53

Dirac, P., 10

notatie, 19

dispersie, 9

dualiteit, 28, 65

dwarsfluit, 4, 10, 11, 22, 40

E

eigen

frequentie, 9, 22

boventoon, 4

grondtoon, 4, 10

functie, 15, 17, 22, 38, 39

toestand, 9–11, 22, 31, 33,
44

waarde, 15, 17, 33, 40, 44

continu, 33

discreet, 33

vergelijking, 21

Einstein, A., 27, 55

elektron, 28

encryptie, 53
 evolutie, 4, 23, 32
 determinisme, 7
 irreversibel, 33
 operator, 23
 wet, 5–7

F
 faseruimte, 4
 Feynman, R., 49
 fijnstructuurconstante, 1
 foto-elektrisch effect, 27
 foton, 27
 Fourier
 som, 13
 Fourier, J., 10
 Fraunhofer, J., 37
 functie, 15

G
 gas
 compressie, 6
 pV-diagram, 6
 Gauss
 functie, 24
 Gauss, J., 24
 Gell-Mann, M., 1
 gemiddelde, 24, 41
 gitaar, 22
 golf, 9
 functie, 20, 28, 32, 38
 instorten, 33
 getal, 12
 lopend, 12
 pakket, 27
 staand, 10, 12
 knoop, 13
 vlies, 13
 vergelijking, 12
 golffunctie, 39, 64
 instorten, 33
 golfgetal, 27
 grootheid
 behoud, 7
 meetbaar, 40

H
 h, 37
 Hamiltoniaan, 39
 harmonische oscillator, 9, 11, 12
 Heisenberg, W., 28
 hoekfrequentie, 27

I
 impuls, 3
 behoud, 5
 golf, 28
 inproduct, 19
 functie, 23
 Interpretatie
 Copenhagen, 33

K
 k, 27
 kans, 1, 20
 verdeling, 20, 24
 functie, 24
 Gauss, 24

L
 Lortenz, H., 55

M
 Mach-Zehnder interferometer,
 45, 46
 massa veer systeem
 zie harmonische oscillator
 9
 meting
 klassiek, 1
 quantum, 1, 25, 33
 verstoort, 1

N
 natuurkunde
 klassiek, 1, 5, 27
 Newton
 evolutiewet, 6
 wetten, 30
 Newton, I., 6
 normaalverdeling, 24

O

onafhankelijk, 19
onbepaaldheid, 28
operator, 15, 16, 19
 \hat{D} , 16
 \hat{H} , 32
 \hat{I} , 16
 'toestandveranderaar', 17
 commutatief, 16
 dirac, 23
 energie, 31, 33, 38
 evolutie, 23, 24
 impuls, 33, 38
 inverse, 17
 irreversibel, 34
 plaats, 38
 quantum, 33
 reversibel, 32
 rotatie, 22
 tijd, 38

P

Penrose, R., 35
Planck
 constante, 37
 curve, 36
Planck, M., 27
poort, 43
 CNOT, 50, 52, 53
 dirac-notatie, 47
 H, 50, 51
 Hadamard, 51, 53
 I, 51, 53
 M, 52
 NOT, 51
 quantum, 50
 S, 51
 X, 23, 51
 Y, 51
 Z, 51
postulaat, 30
punt
 massa, 4
 voorwerp, 3

Q

quantisering, 28
quantum
 evolutie, 4
 golftheorie, 28
 matrix-theorie, 28
 meten, 44
 meting, 44
 ontologie, 35
 systeem, 25
 toestand
 reductie, 33
quantumcomputer, 49
quantummechanica, 1, 10
 regels, 30
qubit, 43, 44, 49, 50, 53
 evolutie, 50
 meting, 53

R

random walk
 klassiek, 24
 quantum, 47
reeks
 harmonisch, 13
reversibel, 5, 17, 52
Rutherford, E., 28
Rydberg, J., 37

S

Schrödinger
 kat, 40
 vergelijking, 20, 32, 38, 39
Schrödinger, E., 28, 31, 32
Solvay 1927, 56
spectrum, 37
 licht, 37
 lijn, 27, 28, 37
 waterstof, 37
spin, 23
superpositie, 10, 11, 13, 22, 31,
 33, 40, 44, 45, 52
 amplitude, 11, 25
 dirac, 11
 dwarsfluit, 11

lineair optellen, 17
trommel, 13
systeem, 3

T

toestand, 3, 17, 23, 24
aangeslagen-, 13
cbit, 6
dobbelsteen, 6, 7
eigen, 33, 45, 65
grond, 4, 13
munt, 4, 6
prepareren, 25
quantum, 19, 20, 30, 31, 33, 45
ruimte, 3
twee, 6, 44, 45
vector, 3
toestandruimte, 12
faseruimte, 6, 31
quantum, 31
telbaar, 6
toevalgenerator, 24
trommel, 13
tunneling, 29
twee-spleten
buckyball, 31
experiment, 31

U

UV-catastrofe, 35

V

vector, 18, 22
eenheids-, 18, 19, 22
genormaliseerd, 19
inproduct, 18, 22
kolom, 18
lengte, 18
normaal, 44
rij, 18
uitproduct, 18
verstrengeling, 48, 53
Bell-toestand, 54
verwachtingswaarde, 21, 24, 45

W

waarschijnlijkheidsverdeling, 21
waterstof, 28

Z

Zeilinger, A., 31, 40
zwarte straler, 27
Planck, 36
Raleigh-Jeans, 35
UV-catastrofe, 35, 36
Wien, 36

OVER MIJ



Philip Habing (1965 en hier bij zijn oldtimer mercedes 350 SE in Antwerpen) doceert al ruim twintig jaar natuurkunde aan leerlingen in examenklassen havo en vwo. Hij beheert de website 3e8.nl en mede door zijn werk als examiner voor het College voor toetsing en examens (staatsexamens) heeft hij een scherp zicht op de huidige natuurkunde syllabi. Philip studeerde af aan de TU Delft op de bouw van een ellipsometrische interferometer. Hij heeft een voorliefde voor zeilen, tuinieren, theoretische natuurkunde en grafische vormgeving. Hij gelooft sterk dat kennis — zeker voor jongeren — vrij beschikbaar moet zijn.

